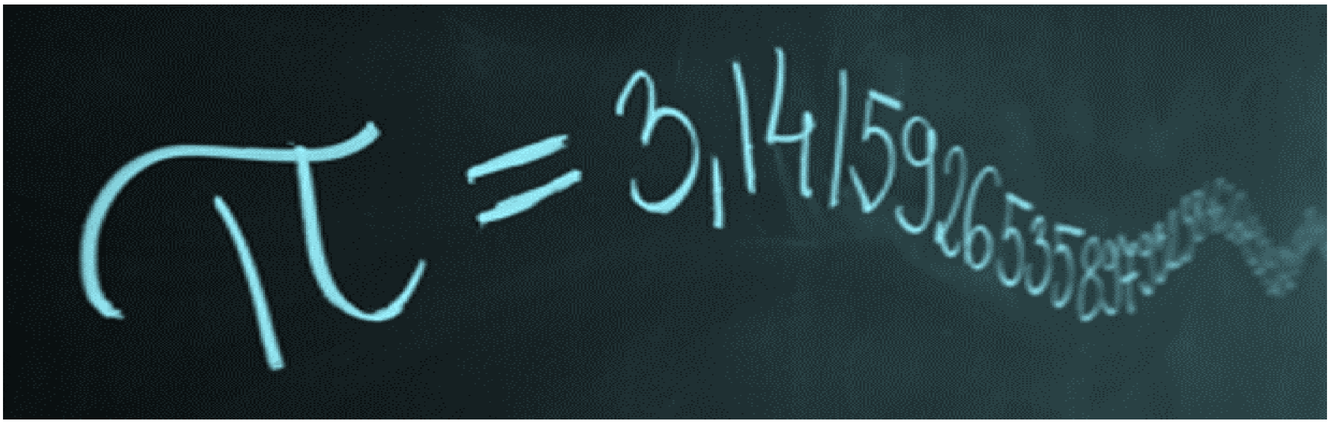
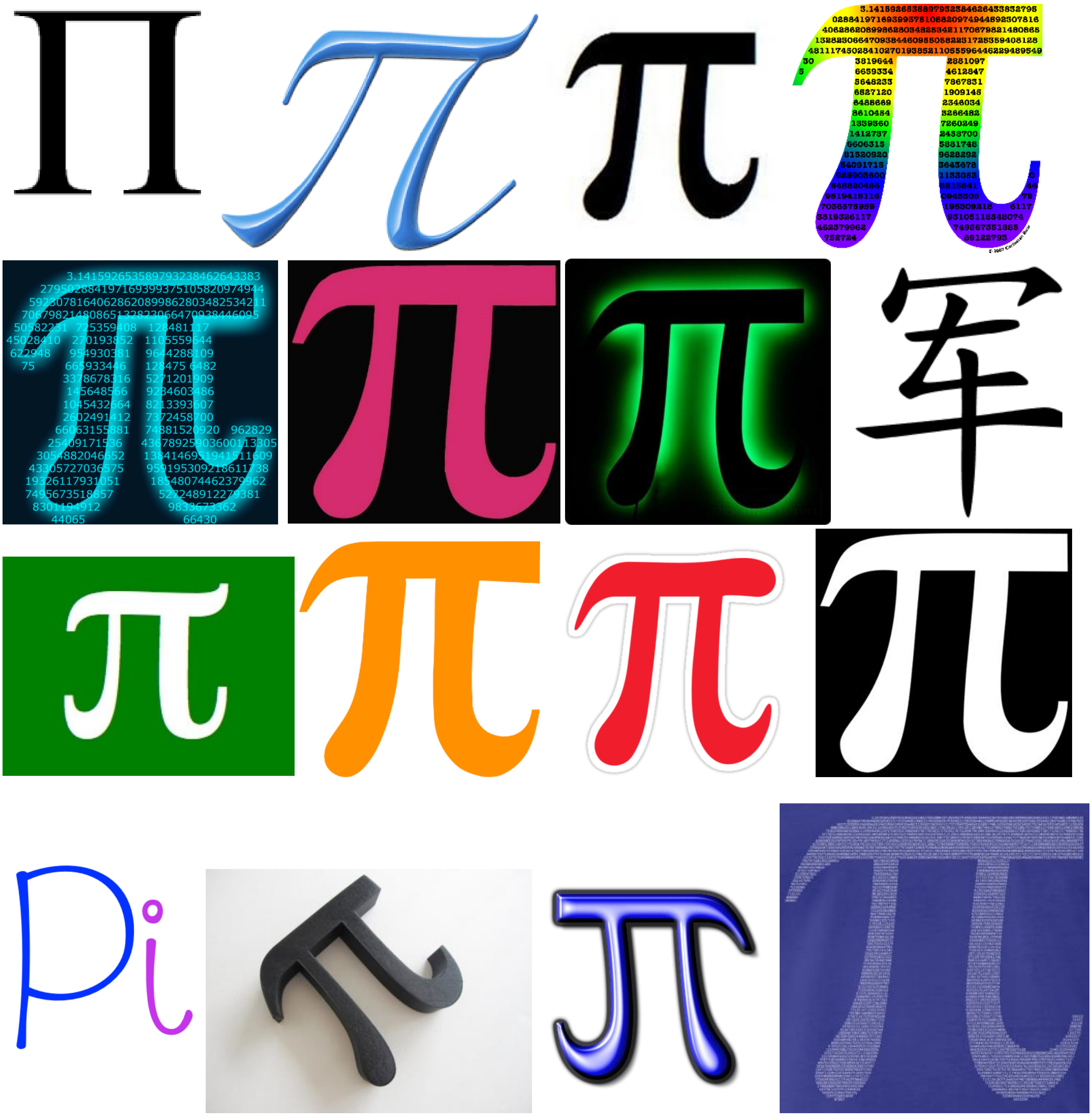
ΜΑΘΗΤΙΚΗ ΜΗΝΙΑΙΑ ΕΦΗΜΕΡΙΔΑ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΤΙΣ ΘΕΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΦΥΛΛΟ Νο 1



Νοέμβριος 2016, **Μουσικό Σχολείο Πρέβεζας** Τιμή : *1 €*



# Περιεχόμενα



Η εφημερίδα θα έχει σε κάθε τεύχος της, μόνιμες στήλες, όπως για παράδειγμα *Μαθηματικά και λογοτεχνία,* προτεινόμενες ασκήσεις, quiz και προβληματισμούς για τις διάφορες τάξεις του Λυκείου και του Γυμνασίου, θέματα διαγωνισμών, ιστορικά στοιχεία και άλλα θέματα που πιστεύουμε ότι θα κρατήσουν αμείωτο το ενδιαφέρον των αναγνωστών.

Ευχόμαστε να απολαύσετε όσο και εμείς αυτό το ταξίδι στο άπειρο και τελειώνοντας την ανάγνωση, να δείτε τον κόσμο γύρω σας με άλλα μάτια, μάτια που θα βλέπουν πιθανότητες και προοπτικές σε κάθε νέα μέρα που ξημερώνει...

*Η συντακτική ομάδα*

Η αγάπη μας για τα μαθηματικά, μια επιστήμη με ανεξάντλητες δυνατότητες και εφαρμογές,, μας έκανε να δοκιμάσουμε τις δυνάμεις μας εκδίδοντας μια εφημερίδα όπου θα προσπαθήσουμε να κολυμπήσουμε λίγο πιο βαθιά στον αχανή κόσμο των μαθηματικών.

" Το ***Π*** " είναι η δεύτερη μαθητική εφημερίδα που εκδίδει το Μουσικό Σχολείο Πρέβεζας μαζί με την εφημερίδα ***'Στη Διαπασών'***.

Το όνομα της εφημερίδας την εμπνευστήκαμε φυσικά από τον αριθμό $\pi$, ναι αυτόν τον γνωστό αριθμό *3,14*. Σ' αυτόν τον αριθμό αφιερώνεται και το πρώτο μας θέμα. Η εφημερίδα επιμελείται και εκδίδεται στα πλαίσια της ερευνητικής εργασίας (*Project*) με θέμα ***' Ο Κόσμος είναι Μαθηματικά '*** που υλοποιείται στο σχολείο από τους μαθητές της Β' Τάξης του Λυκείου, με την αρωγή των καθηγητών αλλά και άλλων μαθητών του σχολείου. Στόχος μας είναι να εκδίδεται κάθε μήνα για το τρέχον σχολικό έτος *2016-2017*, αλλά και να συνεχιστεί ενδεχομένως και τα επόμενα χρόνια.

Ο αρχικός σχεδιασμός είναι να εκτυπωθούν *16* ή *20* σελίδες ποικίλου μαθηματικού ενδιαφέροντος με υλικό από το διαδίκτυο, περιοδικά και βιβλία, αλλά και με θέματα που αφορούν και άλλες θετικές επιστήμες. Αναγνώστες της εφημερίδας μπορεί να είναι μαθητές με κλίση και αγάπη για τα μαθηματικά και όχι μόνο, καθηγητές αλλά και οποιοσδήποτε μπορεί μέσα από τα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες να δει κάτι περισσότερο από σύμβολα και αριθμούς. Σίγουρα για τους αθεράπευτα ρομαντικούς του χώρου των μαθηματικών θα είναι μια ξενάγηση σε έναν υπέροχο κόσμο. Λένε πως τα μαθηματικά είναι σαν ένα σκοτεινό δωμάτιο, δεν ξέρεις τι υπάρχει μέσα, αλλά σίγουρα δεν είναι άδειο. Βασισμένοι σε αυτό, κάναμε σκοπό αυτής της εφημερίδας να σας φέρουμε λίγο πιο κοντά σε αυτή την από πολλούς παρεξηγημένη επιστήμη ως δύσκολη, ακατανόητη και ανούσια.

Η συντακτική μας ομάδα αυτή τη στιγμή απαρτίζεται από μαθητές, ενώ οποιοσδήποτε μπορεί να ασχοληθεί με την εφημερίδα και να συμμετάσχει στην έκδοσή της. Υπεύθυνος Καθηγητής *Κώτσης Μάνθος.*

# Η ιστορία του αριθμού π

Η ιστορία αυτή έχει από όλα !!! Αναφέρεται στον πιο διάσημο αριθμό… Τον αριθμό $\pi$.
Ναι, αυτού του περίεργου αριθμού του *3,14159…* .
Του αριθμού που όλες οι φυλές του κόσμου προσπάθησαν να υπολογίσουν. Βαβυλώνιοι , Εβραίοι, Αιγύπτιοι, Έλληνες, Άραβες, Ινδοί, Κινέζοι, Ευρωπαίοι, Ιάπωνες, Αμερικανοί.
Του αριθμού που αφιερώνονται εδάφια στη βίβλο και σε αρχαίες κωμωδίες.
Του αριθμού για τον οποίο δημιουργούνται ταινίες ως και ποιηματάκια απομνημόνευσης.

Ο αριθμός $\pi$ είναι μια μαθηματική σταθερά οριζόμενη ως ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο ενός κύκλου, ενώ με ακρίβεια οκτώ δεκαδικών ψηφίων είναι ίση με *3,14159265*. Εκφράζεται με το ελληνικό γράμμα $\pi$ από τα μέσα του *18ου* αιώνα, παρότι επίσης μερικές φορές γράφεται ως *pi*.

Ο $\pi$ είναι ένας άρρητος αριθμός, κάτι που σημαίνει ότι δεν μπορεί να εκφραστεί ακριβώς ως λόγος δύο ακεραίων (όπως *22/7* ή άλλα κλάσματα που χρησιμοποιούνται συνήθως για την προσέγγιση του $\pi$)· κατά συνέπεια, η δεκαδική απεικόνιση δεν τελειώνει ποτέ και ποτέ δεν εγκαθίσταται σε μια μόνιμη και επαναλαμβανόμενη παράσταση. Τα ψηφία φαίνεται να εμφανίζονται με τυχαία σειρά, αν και δεν έχει ανακαλυφθεί ακόμη κάποια απόδειξη για αυτό. Ο $\pi$ είναι ένας υπερβατικός αριθμός, δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα ενός μη-μηδενικού πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές. Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι είναι αδύνατο να λυθεί το αρχαίο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη.

Για χιλιάδες χρόνια, μαθηματικοί προσπάθησαν να επεκτείνουν την κατανόησή τους πάνω στο $\pi$, κάποιες φορές με τον υπολογισμό της αξίας με υψηλό βαθμό ακρίβειας. Πριν από τον *15ο* αιώνα, μαθηματικοί όπως ο Αρχιμήδης και ο Liu Hui χρησιμοποίησαν γεωμετρικές τεχνικές βασιζόμενες σε πολύγωνα, για να υπολογίσουν την αξία του $\pi$. Περί τον *15ο* αιώνα νέοι αλγόριθμοι βασιζόμενοι σε άπειρες σειρές υπολογίζουν τον αριθμό $\pi$ με μεγαλύτερη ακρίβεια και χρησιμοποιούνται από μαθηματικούς όπως ο Madhava της Sangamagrama, ο Ισαάκ Νιούτον, ο Λέοναρντ Όιλερ, ο Καρλ Φρίντριχ Γκάους, και ο Σρινιβάσα Ραμανούτζαν.

Τον *20ό* και *21ο* αιώνα, μαθηματικοί και πληροφορικοί ανακάλυψαν νέες προσεγγίσεις που, όταν συνδυάζονται με την αυξημένη υπολογιστική ισχύ, επεκτείνουν τη δεκαδική απεικόνιση του *π* πάνω από *10* τρισεκατομμύρια *($10^{13}$)* ψηφία *(2011)*. Οι επιστημονικές εφαρμογές δεν απαιτούν γενικά περισσότερα από *40* ψηφία του *π*· έτσι το πρωταρχικό κίνητρο για αυτούς τους υπολογισμούς είναι η ανθρώπινη επιθυμία να σπάει ρεκόρ. Οι πολύπλοκοι υπολογισμοί που εμπλέκονται στον υπολογισμό των ψηφίων του *π* έχουν χρησιμοποιηθεί για τη δοκιμή υπερυπολογιστών και σε αλγόριθμους πολλαπλασιασμού υψηλής ακρίβειας.
Το *π* βρίσκεται σε πολλούς τύπους της τριγωνομετρίας και της γεωμετρίας, ειδικά όσον αφορά κύκλους, ελλείψεις ή σφαίρες. Βρίσκεται επίσης και σε διάφορους τύπους από άλλους κλάδους της επιστήμης, όπως η Κοσμολογία, η Θεωρία των αριθμών, η Στατιστική, τα fractal, η θερμοδυναμική, η μηχανική, και ο ηλεκτρομαγνητισμός. Ο καθολικός χαρακτήρας του *π* τον καθιστά μια από τις πιο ευρέως γνωστές μαθηματικές σταθερές, τόσο εντός όσο και εκτός της επιστημονικής κοινότητας και έχει αποτελέσει θέμα λογοτεχνικών βιβλίων. Ο αριθμός γιορτάζεται την «ημέρα του *π*» και ρεκόρ υπολογισμού των ψηφίων του *π* συχνά αναφέρονται σε τίτλους ειδήσεων. Αρκετοί άνθρωποι προσπάθησαν να απομνημονεύσουν την τιμή του *π* με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια, οδηγώντας σε ρεκόρ απομνημόνευσης πάνω από *67.000* ψηφία !

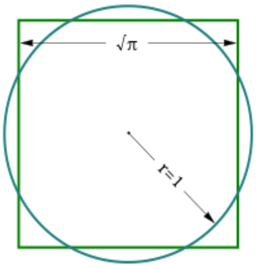
**Ορισμός**

Η περιφέρεια του κύκλου είναι ελαφρώς περισσότερη από τρεις φορές όσο η διάμετρός του. Η ακριβής αναλογία ονομάζεται *π*.

Ως *π* συχνά ορίζεται το πηλίκο της περιφέρειας ενός κύκλου προς την διάμετρό του.
Ο λόγος αυτός είναι σταθερός και ανεξάρτητος από το μέγεθος του κύκλου. Για παράδειγμα, αν ένας κύκλος έχει διπλάσια διάμετρο, αυτός θα έχει και διπλάσια περιφέρεια, διατηρώντας το λόγο αυτό σταθερό. Αυτός ο ορισμός του *π* είναι έγκυρος μόνο σε επίπεδη (Ευκλείδεια) Γεωμετρία, ενώ αν επεκταθεί σε κυρτές (Μη-Ευκλείδειες) Γεωμετρίες ο λόγος δεν παραμένει σταθερός.

Ο Λέοναρντ Όιλερ διέδωσε τη χρήση του ελληνικού γράμματος *π* στα έργα που δημοσίευσε το *1736* και το *1748*.
Η πρώτη γνωστή χρήση του ελληνικού γράμματος *π* για να αντιπροσωπεύσει την αναλογία της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του ήταν από τον μαθηματικό William Jones στο έργο του, το *1706*, *Σύνοψη Palmariorum Matheseos· ή, Μια Νέα Εισαγωγή στα Μαθηματικά*. Ο Jones μπορεί να επέλεξε το *π* επειδή ήταν το πρώτο γράμμα στην ελληνική ορθογραφία της λέξης *περιφέρεια*. Ωστόσο, γράφει ότι οι εξισώσεις του *π* είναι από την «έτοιμη πένα του πραγματικά έξυπνου κ. John Machin», οδηγώντας σε εικασίες ότι ο Machin μπορεί να ασχολήθηκε με το ελληνικό γράμμα πριν τον Jones. Αυτό πράγματι είχε χρησιμοποιηθεί νωρίτερα για τις γεωμετρικές ερμηνείες. Ο William Oughtred χρησιμοποιεί τα ελληνικά γράμματα *π* και *δ*, για να εκφράσει αναλογίες της περιφέρειας και της διαμέτρου το *1647*. Το ίδιο συμβαίνει και σε μεταγενέστερες *εκδόσεις* του *Clavis Mathematicae*.
Μετά την εισαγωγή του ελληνικού γράμματος από τον Jones το *1706*, δεν υιοθετήθηκε από άλλους μαθηματικούς μέχρι ο Leonhard Euler άρχισε να το χρησιμοποιεί, αρχίζοντας με το έργο του "Μηχανική" το *1736*. Πριν από τότε, οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν μερικές φορές γράμματα όπως το *c* ή το *p*. Ο Euler συνευρισκόταν σε μεγάλο βαθμό με άλλους μαθηματικούς στην Ευρώπη και έτσι η χρήση του *π* εξαπλώθηκε γρήγορα. Το *1748*, ο Euler χρησιμοποίησε το *π* στο ευρέως διαβασμένο έργο του *Introductio in analysin infinitorum* (έγραψε: «για λόγους συντομίας θα γράφουμε τον αριθμό *π*· έτσι ο *π* είναι ίσος με το μισό της περιφέρειας ενός κύκλου ακτίνας *1*») και η πρακτική του εγκρίθηκε παγκοσμίως στη συνέχεια στον Δυτικό Κόσμο.

Το *π* είναι ένας άρρητος αριθμός, που σημαίνει ότι αυτός δεν μπορεί να γραφεί ως πηλίκο δύο ακεραίων, όπως άλλα κλάσματα που χρησιμοποιούνται συνήθως για την προσέγγισή του. Δεδομένου ότι το *π* είναι άρρητος, έχει έναν άπειρο αριθμό ψηφίων σε δεκαδική αναπαράσταση, και αυτό δεν τελειώνει με μια απείρως επαναλαμβανόμενη σειρά ψηφίων. Υπάρχουν αρκετές αποδείξεις ότι το *π* είναι άρρητος οι οποίες γενικά απαιτούν λογισμό και επικαλούνται την εις άτοπον απαγωγή.




Επειδή ο *π* είναι υπερβατικός αριθμός, ο Τετραγωνισμός του κύκλου δεν είναι δυνατός σε ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων χρησιμοποιώντας τα κλασικά εργαλεία του κανόνα και διαβήτη.
Με άλλα λόγια, είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε, χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη, ένα τετράγωνο του οποίου η περιοχή είναι ίση προς την έκταση ενός δεδομένου κύκλου. Ο τετραγωνισμός του κύκλου ήταν ένα από τα σημαντικότερα γεωμετρικά προβλήματα της κλασικής αρχαιότητας. Ερασιτέχνες μαθηματικοί στη σύγχρονη εποχή μερικές φορές προσπάθησαν να τετραγωνίσουν τον κύκλο, και μερικές φορές ισχυρίζονταν επιτυχία, παρά το γεγονός ότι είναι αδύνατο.

**Ιστορία του *π***

Η Μεγάλη Πυραμίδα στην Γκίζα, κατασκευασμένη το *2589–2566* π.Χ., χτίστηκε με περίμετρο περίπου *1760* πήχεις και ύψος περίπου *280* πήχεις· η αναλογία *1760/280* είναι περίπου ίση με *2π*. Με βάση αυτή την αναλογία, κάποιοι Αιγυπτιολόγοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι οικοδόμοι της πυραμίδας είχαν γνώση του *π* και σκόπιμα σχεδίασαν την πυραμίδα για να ενσωματώσουν τις αναλογίες του κύκλου. Άλλοι ισχυρίζονται πως η χρήση του *π* είναι απλώς μια σύμπτωση, επειδή δεν υπάρχει κάποια απόδειξη ότι οι οικοδόμοι της πυραμίδας γνώριζαν το *π*, και επειδή οι διαστάσεις της πυραμίδας βασίζονται σε άλλους παράγοντες.
Οι παλαιότερες γραπτές προσεγγίσεις του *π* βρίσκονται στην Αίγυπτο και τη Βαβυλώνα, απέχουν ένα τοις εκατό από την πραγματική αξία. Στη Βαβυλώνα, ένας δίσκος της χρονολογείται το *1900–1600* π.Χ. έχει μια γεωμετρική δήλωση που, κατ' επέκταση, αντιμετωπίζει τον *π* ως *25/8 = 3.1250*. Στην Αίγυπτο, ο Πάπυρος Rhind , χρονολογείται γύρω στο *1650* π.Χ., αλλά έχει

αντιγραφεί από ένα έγγραφο που χρονολογείται το *1850* π.Χ. έχει ένα τύπο που την αντιμετωπίζει την σταθερά *π* ως $(16/9)^2 \approx 3.1605$.
Στην Ινδία γύρω στο *600* π.Χ., το Shulba Sutras (σανσκριτικά κείμενα που είναι πλούσια σε μαθηματικό περιεχόμενο) εξομοιώνει τον *π* με $(9785/5568)^2 \approx 3.088$. Το *150* π.Χ., ινδικές πηγές θεωρούν τον *π* ως *3.1622.*
Δύο στίχοι της Εβραϊκής Βίβλου (γράφτηκε περίπου στον *8ο* και *3ο* αιώνα π.Χ.) περιγράφει μια τελετουργική λεκάνη στο Ναό του Σολομώντα με διάμετρο δέκα πήχεις και η περίμετρός του τριάκοντα πήχεις· Οι στίχοι υποδηλώνουν ότι ο *π* είναι περίπου τρία αν η λεκάνη είναι κυκλική. Ο Rabbi Nehemiah εξήγησε τη διαφορά ως λόγω του πάχους του σκάφους. Το πρώιμο έργο της γεωμετρίας, *Mishnat ha-Middot*, γράφτηκε γύρω στο *150* μ.Χ. και παίρνει την τιμή του *π* για να είναι τρία και ένα έβδομο.

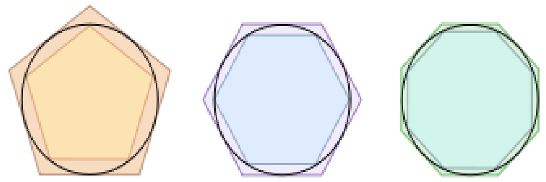
**Μνημονικός κανόνας**

Ο Πλούταρχος αναφέρει στο έργο του *Ερωτήσεις* "Πῶς Πλάτων ἔλεγε τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν." Από αυτή τη φράση προκύπτει ο μνημονικός κανόνας "*Αεί ο Θεός ο μέγας γεωμετρεί*" όπου ο αριθμός των γραμμάτων δείχνει το αντίστοιχο ψηφίο του αριθμού *π*, με προσέγγιση *5* δεκαδικών ψηφίων *(3,14159).*

- *Αεί = 3, ο = 1, Θεός = 4 , ο =1 , μέγας = 5, γεωμετρεί = 9*

Σε νεότερους χρόνους, έχει χρησιμοποιηθεί μεγαλύτερη πρόταση για περισσότερα ψηφία "*Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί, το κύκλου μήκος ίνα ορίση διαμέτρω, παρήγαγεν αριθμόν απέραντον, καί όν, φεύ, ουδέποτε όλον θνητοί θα εύρωσι*".

**Εποχή πολύγωνου προσέγγισης**



Το *π* μπορεί να υπολογιστεί με τον υπολογισμό της περιμέτρου του περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου πολυγώνου.
Ο πρώτος καταγεγραμμένος αλγόριθμος για τον αυστηρό υπολογισμό της αξίας του *π* ήταν μια γεωμετρική προσέγγιση χρησιμοποιώντας πολύγωνα, επεξεργάσθηκε γύρω στο *250* π.Χ. ο Έλληνας μαθηματικός Αρχιμήδης. Αυτός ο πολυγωνικός αλγόριθμος κυριαρχεί για πάνω από *1.000* χρόνια και ως εκ τούτου το *π* μερικές φορές αναφέρεται ως "Σταθερά του Αρχιμήδη". Ο Αρχιμήδης υπολόγισε τα ανώτερα και κατώτερα όρια του *π* με σχέδιο σε κανονικό εξάγωνο μέσα και έξω από ένα κύκλο και διαδοχικά διπλασιασμού του αριθμού των πλευρών, ώσπου έφτασε στην *96*-όψη κανονικού πολυγώνου. Περίπου το *150* μ.Χ., ο Έλληνας-Ρωμαίος επιστήμονας Πτολεμαίος, στην Αλμαγέστη, έδωσε μια τιμή για το *π* το *3.1416.* Οι μαθηματικές χρήσεις των πολυγωνικών αλγορίθμων φτάνουν τα *39* ψηφία του *π* το *1630*, ένα ρεκόρ που έσπασε μόνο το *1699* όταν άπειρες σειρές χρησιμοποιήθηκαν για την επίτευξη *71* ψηφίων.

Στην Αρχαία Κίνα, στις τιμές για το *π* περιλαμβάνονται ο *3.1547* (γύρω στο *1* μ.Χ.), το $\sqrt{10}$ (*100* μ.Χ, περίπου *3.1623*), και *142/45* (*3ο* αιώνα, περίπου *3.1556*). Το *265* μ.Χ., ο μαθηματικός Liu Hui δημιούργησε ένα πολύγωνο με βάση τον επαναληπτικό αλγόριθμο και το χρησιμοποίησε με ένα πολύγωνο *3.072*-διπλής όψης, για να πάρει μια τιμή του *π* την *3.1416.* Ο Κινέζος μαθηματικός Zu Chongzhi, γύρω στο *480* μ.Χ., υπολόγισε ότι $\pi \approx 355/113$, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Liu Hui, εφαρμόζεται σε ένα πολύγωνο *12.288*-πλευρών. Με μια σωστή τιμή για τα επτά πρώτα δεκαδικά ψηφία, αυτή η τιμή *3.141592920...* παραμένει η πιο ακριβής προσέγγιση του *π* διαθέσιμη για τα επόμενα *800* χρόνια.
Ο Ινδός αστρονόμος Aryabhata χρησιμοποίησε την τιμή *3.1416* (*499* μ.Χ.).
Ο Fibonacci το *1220* υπολόγισε *3.1418* χρησιμοποιώντας μια πολυγωνική μέθοδο, ανεξάρτητη του Αρχιμήδη. Ο Ιταλός συγγραφέας Dante ασχολήθηκε όπως φαίνεται με την αξία $3+\frac{\sqrt{2}}{10} \approx 3.14142$.
Ο Πέρσης αστρονόμος Jamshīd al-Kāshī παρήγαγε *16* ψηφία το *1424* χρησιμοποιώντας ένα πολύγωνο με $3\times 2^{28}$ πλευρές, το οποίο αντιπροσωπεύει για *180* περίπου χρόνια παγκόσμιο ρεκόρ. Ο Γάλλος μαθηματικός François Viète το *1579* κατόρθωσε (να παράγει) *9* ψηφία με ένα πολύγωνο με $3\times 2^{17}$ πλευρές. Ο Φλαμανδός μαθηματικός Adrian van Roomen έφτασε στα 15 δεκαδικά ψηφία το 1593. Το 1596, ο Ολλανδός μαθηματικός Ludolph van Ceulen έφτασε τα *20* ψηφία, ένα ρεκόρ που αργότερα αυξήθηκε στα *35* ψηφία (ως εκ τούτου, το *π* ονομαζόταν "αριθμός Ludolphian" στη Γερμανία μέχρι τις αρχές του *20ου* αιώνα).

Ο Ολλανδός μαθηματικός Willebrord Snellius έφτασε τα *34* ψηφία το *1621*, και ο Αυστριακός μαθηματικός Christoph Grienberger έφτασε τα *38* ψηφία το *1630*, τα οποία παραμένουν η ακριβέστερη προσέγγιση με μη αυτόματο τρόπο να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας τον πολυγωνικό αλγόριθμο.
Η ανάπτυξη τεχνικών όπως των απειροσειρών έφεραν επανάσταση στον υπολογισμό του *π*, τον *16ο* και *17ο* αιώνα. Μια άπειρη σειρά επιτρέπει στους μαθηματικούς να υπολογίσουν το *π* με μεγαλύτερη ακρίβεια από τον Αρχιμήδη και άλλους που χρησιμοποίησαν μαθηματικές τεχνικές. Αν και άπειρες σειρές εκμεταλλεύτηκαν για τον *π* κυρίως Ευρωπαίοι μαθηματικοί, όπως ο James Gregory και Gottfried Wilhelm Leibniz, η προσέγγιση πρώτα ανακαλύφθηκε στην Ινδία κάποια στιγμή μεταξύ *1400* και *1500* μ.Χ.

Η ανακάλυψη του λογισμού, από τον Άγγλο επιστήμονα Isaac Newton και τον Γερμανό μαθηματικό Gottfried Wilhelm Leibniz το *1660*, οδήγησε στην ανάπτυξη πολλών άπειρων σειρών για την προσέγγιση του *π*. Ο ίδιος ο Newton χρησιμοποιεί μια σειρά για τον υπολογισμό *15* ψηφίων του *π* το *1665* ή *1666*, αργότερα έγραψε "Ντρέπομαι να σου πω πόσα στοιχεία έφερα με αυτούς τους υπολογισμούς, αφού καμία άλλη χρήση δεν έχουν αυτή την στιγμή."

Η ανακάλυψη των υπολογιστών στα μέσα του *20ου* αιώνα αναζωπύρωσαν όπως ήταν αναμενόμενο το κυνήγι για τα ψηφία του *π*.

ΠΗΓΗ : Βικιπαίδεια

*Από τις μαθήτριες Αδαμαντία Θεοφάνους & Ιωάννα Παπίρη*

# Το σχολείο μας

Το Μουσικό Σχολείο Πρέβεζας πρόκειται για νεοσύστατο φορέα, που ξεκίνησε τη λειτουργία του το *2009*. Μέσα σε λίγα χρόνια έχει αυξηθεί σημαντικά το μέγεθος του μαθητικού πληθυσμού από *7* μαθητές το *2009*, σε περισσότερους από *160* μαθητές σήμερα σε έξι τάξεις (Γυμνάσιο και Λύκειο). Στεγάζεται σε παλιές εγκαταστάσεις που έχουν παραχωρηθεί από την Περιφέρεια Ηπείρου, μέχρι την ανέγερση νέου κτιρίου.

Σκοπός του Μουσικού Σχολείου είναι η αισθητική καλλιέργεια των μαθητών, μέσω της μουσικής παιδείας, παρέχοντας παράλληλα τη μόρφωση που παρέχεται και από τα υπόλοιπα γενικά σχολεία. Η κατεύθυνσή του είναι ανθρωπιστική και ο στόχος του, πέρα από τις επιδόσεις είναι ο άνθρωπος.

Οι μαθητές του Μουσικού Σχολείου διδάσκονται όλα τα μαθήματα Γενικής Παιδείας (Νέα, Αρχαία, Μαθηματικά κ.λ.π.) κατευθύνσεων και επιλογής (Λύκειο) και υπάρχει η δυνατότητα επιλογής δεύτερης ξένης γλώσσας γαλλικής, ιταλικής ή γερμανικής.

Επιπλέον διδάσκονται Μουσικά Μαθήματα όπως ιστορία, θεωρία, παραδοσιακή μουσική σε ολιγομελή τμήματα και Μουσικά Όργανα (ευρωπαϊκά και παραδοσιακά) σε ατομικό μάθημα.

Το *2013-2014* θεσπίστηκε το νέο μεταβατικό Πρόγραμμα Σπουδών στο οποίο ενσωματώθηκαν οι αλλαγές που περιλαμβάνονται για το ΝΕΟ ΛΥΚΕΙΟ .

Το *2014-2015* εφαρμόζεται το Νέο Ωρολόγιο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μουσικά Σχολεία και αφορά τις αλλαγές για το ΝΕΟ ΛΥΚΕΙΟ.

Το σχολείο στεγάζεται στην Λ. Ιωαννίνων *210* (κτίριο πρώην Τ.Ε.Ι) και έχει δρομολογηθεί η μεταστέγασή του σε νέο ιδιόκτητο κατάλληλο κτίριο. Η μετακίνηση των μαθητών γίνεται δωρεάν με λεωφορεία ή ειδικά μισθωμένα ταξί.

Λόγω του διευρυμένου ωραρίου, παρέχεται σίτιση των μαθητών προς το τέλος του ωρολογίου προγράμματος.

Οι μαθητές του Μουσικού Σχολείου συνεχίζουν τη φοίτησή τους στο Μουσικό Λύκειο και προετοιμάζονται για τις εξετάσεις στα Α.Ε.Ι-Τ.Ε.Ι.

Η εισαγωγή των μαθητών στο Μουσικό Σχολείο γίνεται ύστερα από επιλογή από Επιτροπή Μουσικών.

Ηλεκτρονική Διεύθυνση του Μουσικού Σχολείου Πρέβεζας :

http://preveza-music-school.gateweb.gr/

*Επιμελήθηκε η μαθήτρια Τέφα Ελένη*

# Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (ΕΜΕ) έχει **ιστορία** *90* ετών. Ιδρύθηκε το *1918* στην Αθήνα και σήμερα έχει **παραρτήματα** στους περισσότερους νομούς της χώρας, ενώ αναπτύσσει πολύπλευρη **δραστηριότητα**. Η λειτουργία της βασίζεται στην εθελοντική προσφορά των μελών της, της **διοίκησής** της, των δεκάδων μελών της εταιρείας που στελεχώνουν τις **επιτροπές** εργασίας στην Αθήνα και τις άλλες πόλεις αλλά και όλων των υπόλοιπων μελών της που συνεισφέρουν κατά περίπτωση.

Σκοπός της ΕΜΕ είναι η προαγωγή και η διάδοση των διαφόρων κλάδων της Μαθηματικής Επιστήμης. Ο σκοπός αυτός επιτυγχάνεται μέσα από σειρά στόχων που έχουν τεθεί και που είναι σε γενικές γραμμές οι εξής:

- ✓ **η πρόοδος της Επιστήμης των Μαθηματικών**
- ✓ **η ανάπτυξη της ελεύθερης ανταλλαγής των πληροφοριών μεταξύ των μαθηματικών, των επιστημόνων και της κοινωνίας.**
- ✓ **η ανάπτυξη και η συντήρηση της επιστημονικής ακεραιότητας και η βελτίωση των δυνατοτήτων των μελών της.**
- ✓ **η ουσιαστική και συνεχής βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης και η πρόοδος της γενικής εκπαίδευσης.**
- ✓ **η προσέγγιση του Έλληνα μαθηματικού, η ενημέρωσή του για κάθε πρόσφατη πρόοδο της επιστήμης και της τεχνολογίας και η προσφορά πρακτικής βοήθειας σε θέματα που τον αφορούν κατά τη διάρκεια της ακαδημαϊκής, εκπαιδευτικής και διδακτικής εργασίας του.**

Στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων που επιλέγει για την επίτευξη των στόχων της Εταιρείας, ανήκουν:

α) Η έκδοση περιοδικών εντύπων και άλλων δημοσιευμάτων, επίσης η ανταλλαγή δημοσιευμάτων ανάμεσα στη Μαθηματική Εταιρεία και άλλες Επιστημονικές Εταιρείες, Σωματεία ή Ιδρύματα της Χώρας μας και του εξωτερικού που επιδιώκουν τους ίδιους ή παραπλήσιους σκοπούς.

β) Η οργάνωση και λειτουργία βιβλιοθήκης.

γ) Η πραγματοποίηση διαλέξεων και συζητήσεων, η διεξαγωγή Σεμιναρίων, η οργάνωση Συνεδρίων, η ίδρυση Επιστημονικών Κέντρων και άλλες επιστημονικές δραστηριότητες και

δ) Η συνεχής βελτίωση των διαφόρων προγραμμάτων της εταιρείας και η υλοποίηση κάθε άλλης δραστηριότητας αντάξιας προς το κύρος και την ιστορία της ΕΜΕ

**Ειδικότερα:**

Κάθε χρόνο η ΕΜΕ διεξάγει βραχυχρόνια και μακροχρόνια **σεμινάρια** Διδακτικής των Μαθηματικών, Επαγγελματικής Κατάρτισης στην Πληροφορική και Επιμόρφωσης στην Πληροφορική για εκπαιδευτικούς.

Εκδίδει τα παρακάτω περιοδικά:

**Bulletin of the Hellenic Mathematical Society, journal for mathematics in education, Μαθηματική Επιθεώρηση, Μικρός Ευκλείδης, Ευκλείδη Α', Ευκλείδη Β', Ευκλείδη Γ', Αστρολάβος και** κατά διαστήματα προχωρεί και στην έκδοση μαθηματικών **βιβλίων** Ελλήνων και ξένων συγγραφέων.

Πραγματοποιεί με επιτυχία σε ετήσια βάση το τριήμερο **Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας**, στο οποίο συμμετέχουν Μαθηματικοί από όλη την χώρα αλλά και το εξωτερικό.

Οργανώνει τους τρεις ετήσιους **Πανελλήνιους Μαθητικούς Διαγωνισμούς στα Μαθηματικά**: "Θαλής", "Ευκλείδης", "Αρχιμήδης" και με τους μαθητές που διακρίνονται σε αυτούς σχηματίζει την εθνική ομάδα που εκπροσωπεί την Ελλάδα στη Βαλκανική και στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα. Υλοποιεί **προγράμματα** υπό την αιγίδα του Υπουργείου Παιδείας ή και της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Συντηρεί και αναπτύσσει την **Τράπεζα Θεμάτων** για τα μαθηματικά του Λυκείου, μία συλλογή δεκάδων ταξινομημένων ασκήσεων που συνεχώς μεγαλώνει και είναι ελεύθερα διαθέσιμες μέσα από το Διαδίκτυο. Προσκαλεί σε πνευματική μαθηματική ψυχαγωγία με την **"Ασκηση"** - πρόκληση, που δημοσιεύει και δέχεται προτεινόμενες λύσεις.

Όλα τα παραπάνω αποδεικνύουν ότι σήμερα η ΕΜΕ είναι μία ενεργός και ακμάζουσα επιστημονική ένωση, που αναπτύσσει πλούσια δραστηριότητα στους τομείς της εκπαίδευσης και της έρευνας. Επειδή όμως η ανάπτυξη και υποστήριξη όλων των δραστηριοτήτων της ΕΜΕ βασίζονται στην εθελοντική εργασία των μελών της, που συμμετέχουν σε μια σειρά ανοικτών **Επιτροπών** σχετικών με αυτές, υπάρχει πάντα μια "ανοικτή" πρόσκληση προς όλους τους συναδέλφους που επιθυμούν να βοηθήσουν την εταιρεία, με τη συμμετοχή τους στις διάφορες εκδόσεις, τις ημερίδες, τους διαγωνισμούς, τα εκπαιδευτικά θέματα, τους υπολογιστές και άλλες επιτροπές.

Η ΕΜΕ έχει σήμερα περισσότερα από *15000* μέλη και *34* περιφερειακά παραρτήματα, με μια σημαντική παρουσία στο πεδίο της επιστήμης και του πολιτισμού. Ο αριθμός νέων μελών συνεχώς αυξάνεται, δεδομένου ότι υπάρχει μια συστηματική προώθηση των δραστηριοτήτων της ΕΜΕ καθώς και των ωφελημάτων που διαχέονται σε όλα τα μέλη.

Η διατήρηση ενός επιστημονικού σωματείου είναι πάντα ένας πολύ δύσκολος στόχος, δεδομένου ότι πολλές καθημερινές ενέργειες έχουν επιπτώσεις στις επιστημονικές ενώσεις. Παρ' όλα αυτά ο αριθμός των μελών και οι επιστημονικές δραστηριότητες της εταιρείας αποδεικνύουν ότι η ΕΜΕ κατορθώνει να κατέχει μια διακεκριμένη επιστημονική θέση τόσο στην Ελλάδα όσο και παγκόσμια, ακόμη και μέσα σε αντίξοες οικονομικές ή άλλες αρνητικές συνθήκες.

Η συνολική δραστηριότητα και η εικόνα που παρουσιάζει σήμερα η ΕΜΕ οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι οι μαθηματικοί διακρίνονται από μια φυσική επιθυμία και ένα αίσθημα ευθύνης στο να αποτελούν ένα ζωντανό και ενεργό μέρος της επιστημονικής κοινότητας, η οποία συνδέεται με τα σημαντικά εκπαιδευτικά προβλήματα της μαθηματικής επιστήμης, το επάγγελμα του μαθηματικού και τις νέες τεχνολογίες σε μια εθνική και διεθνή βάση.

**Αν έχετε πτυχίο Μαθηματικών Ελληνικού ή ξένου ΑΕΙ μπορείτε να γίνετε μέλος της ΕΜΕ.**

Οι διακρίσεις για τους μαθητές του **Μουσικού Σχολείου Πρέβεζας** για τη σχολική περίοδο *2015 - 2016*

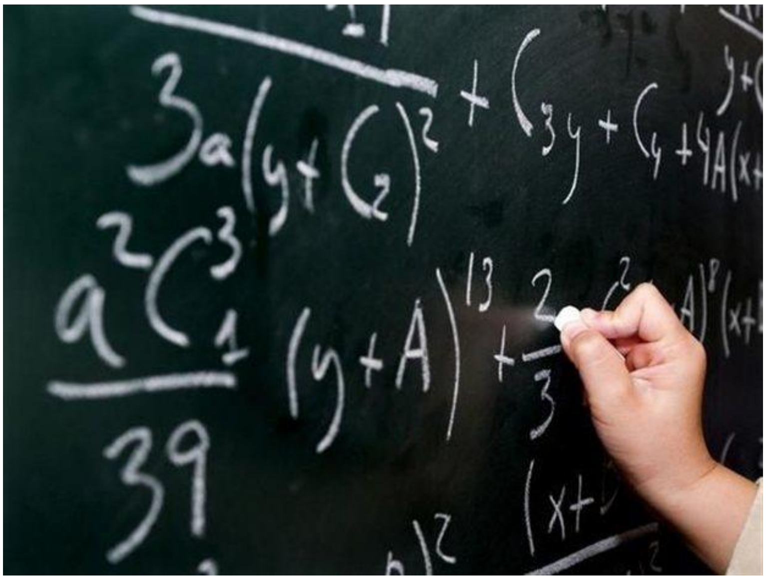
στη **Μαθηματική Εταιρεία** :

**Επιτυχόντες Α' Φάσης, «Θαλής»:**
- Μυρτώ Κωστόγιαννη (Β' Γυμνασίου)
- Απόστολος Βερύκιος (Γ' Γυμνασίου)
- Αλέξανδρος Σισμανίδης (Β' Λυκείου)
- Αριστοτέλης Δημητρακόπουλος (Γ' Λυκείου)
- Χρήστος Ροπόκης (Γ' Λυκείου)

**Επιτυχόντες Β' Φάσης, «Ευκλείδης»:**
- Απόστολος Βερύκιος (Γ' Γυμνασίου)
- Αριστοτέλης Δημητρακόπουλος (Γ' Λυκείου)

Ο Απόστολος Βερύκιος (Γ' Γυμνασίου) ολοκλήρωσε με επιτυχία και τη Γ' Φάση της Ελληνικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας, «Ο Αρχιμήδης», και έλαβε το **Χάλκινο Μετάλλιο**.

Αναμένουμε το νέο διαγωνισμό μέσα στο Νοέμβριο.



*Επιμελήθηκαν οι μαθητές*
*Αναστάσιος Πατσιάς και*
*Ιωάννης Ζήγος*

# Φίλοι αριθμοί, δοξασίες και προλήψεις!!

**220,284**

*"Αποκαλούν συγκεκριμένους αριθμούς ως φίλους αριθμούς και τους αποδίδουν αρετές και κοινωνικές ιδιότητες, αριθμοί όπως ο 284 και ο 220 , γιατί τα μέρη του καθένα έχουν τη δύναμη να δημιουργήσουν τον άλλο."*

*Ιάμβλιχος (425-325)*

Οι φίλοι αριθμοί είναι ζεύγη θετικών ακεραίων αριθμών, στα όποια ο καθένας από αυτούς ισούται με το άθροισμα των διαιρετών του άλλου. Οι Πυθαγόρειοι είχαν κάνει την ανακάλυψη ότι οι αριθμοί *220* και *284* είναι φίλοι. Οι διαιρέτες του 220 είναι:

*1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110* και το άθροισμα τους *1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 =284* .
Αντίστοιχα οι διαιρετές του *284* είναι οι: *1,2,4,71,142* και το άθροισμα τους *1+2+4+71+142=220* .

Το ζευγάρι αυτών των αριθμών έλεγαν ότι αποτελεί σύμβολο φιλίας .Ο Μαρτίν Γκάρντνερ στο βιβλίο του Mathematical Magic Show αναφέρει ότι το Μεσαίωνα πουλιόνταν φυλακτά που είχαν χαραγμένους αυτούς τους αριθμούς και ευνοούσαν ερωτικά όποιον τα φορούσε .
Στο κλασικό βιβλίο του Oystein Ore « Η θεωρία αριθμών και η ιστορία της» ο συγγραφέας αναφέρει:
"Σε πολλά αραβικά κείμενα εμφανίζονται συχνότατα οι φίλοι αριθμοί. Παίζουν κεντρικό ρόλο στην μαγεία και στην αστρολογία, στην σύνταξη των ωροσκοπίων, στην παρασκευή ερωτικών φίλτρων και στην κατασκευή φυλακτών."

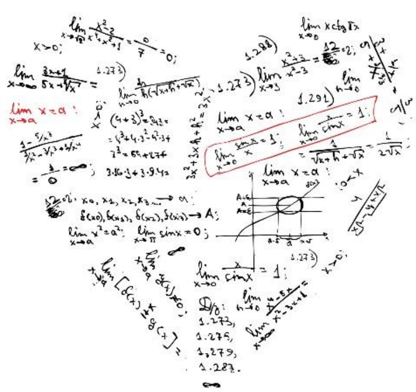
Υπάρχει σαφής αναφορά για το έθιμο να σκαλίζουν τον αριθμό *220* πάνω σε ένα μήλο και το *284* σε έναν άλλο, να τρώνε ύστερα το πρώτο και να προσφέρουν το δεύτερο στο αγαπημένο τους πρόσωπο ως ένα είδος μαθηματικού αφροδισιακού.

Κάποιοι επίσης θεολόγοι των πρώιμων χρόνων σημείωσαν το γεγονός ότι στην γένεση ο Ιακώβ έδωσε *220* κατσίκια στον Ησαϋ , πιστεύοντας ότι ο αριθμός αυτό ,το μισό του φιλικού ζευγαριού, αποτελούσε έκφραση φιλίας του Ιακώβ προς τον Ησαϋ.

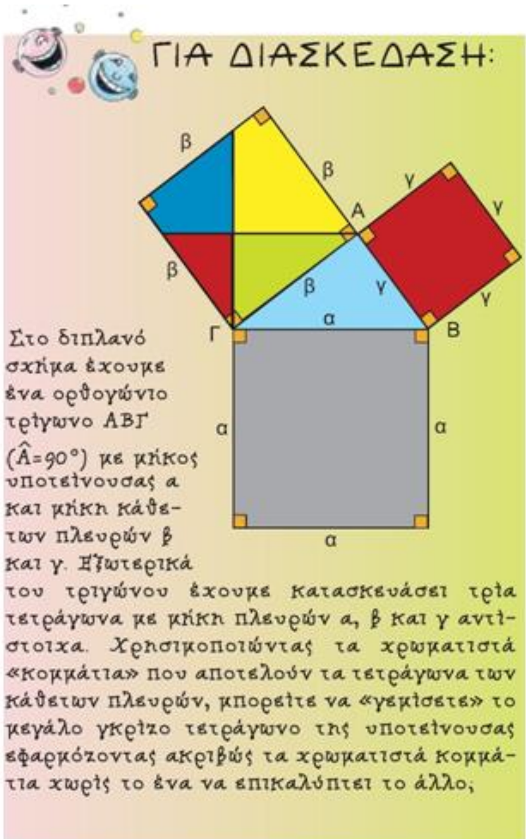
Αλλά ζευγάρια φίλων αριθμών οι αριθμοί *17296* και *18416* ( τους ανακάλυψε ο Φερμά ), ο Ντεκάρτ ανακάλυψε το τρίτο ζεύγος *9363584* και *9437056*,ο Λέοναρντ Όιλερ ανακάλυψε *62* τέτοια ζεύγη φίλων αριθμών. Το *1866* ένας δεκαεξάχρονος Ιταλός ο Νικολό Παγκανίνι (ο διάσημος βιολιστής) ανακάλυψε ένα ζεύγος που είχε παραλειφθεί *1184* και *1210* .

Τα ζεύγη των φίλων αριθμών μέχρι το *100.000* :

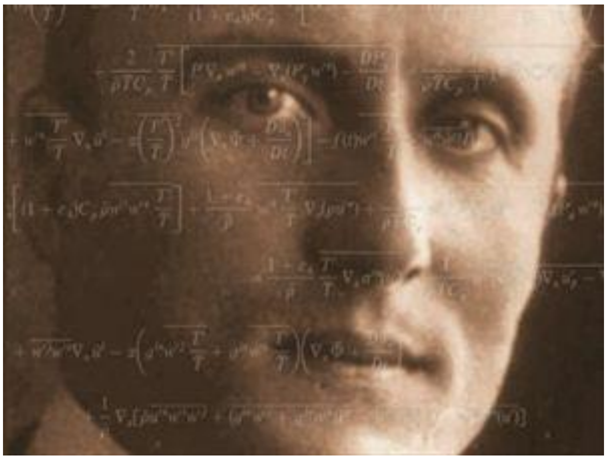
| | |
|---|---|
| *220* | *284* |
| *1184* | *1210* |
| *2620* | *2924* |
| *5020* | *5564* |
| *6232* | *6368* |
| *10744* | *10856* |
| *12285* | *14595* |
| *17296* | *18416* |
| *63020* | *76084* |
| *66928* | *66992* |
| *67095* | *71145* |
| *69615* | *87633* |
| *79750* | *88730* |



*Από τους μαθητές Βαγγέλη Παπασταύρου & Βάσω Κατογιάννη*



# Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή 1873 – 1950



«Κύριοι, ζητήσατε να σας απαντήσω σε χίλια δυο πράγματα, κανείς σας όμως δεν θέλησε να μάθει ποιος ήταν ο δάσκαλός μου, ποιος μου έδειξε και μου άνοιξε τον δρόμο προς την ανώτερη μαθηματική επιστήμη, σκέψη και έρευνα.

Και για να μην σας κουράσω, σας το λέω έτσι απλά, χωρίς λεπτομέρειες, ότι μεγάλος μου δάσκαλος υπήρξε ο αξεπέραστος Έλληνας Κωνσταντίνος Καραθεοδωρής, στον οποίο, εγώ προσωπικά, αλλά και η μαθηματική επιστήμη, η φυσική, η σοφία του αιώνα μας, χρωστάμε τα πάντα»

**Αλμπερτ Αϊνστάιν**

(τελευταία συνέντευξη Τύπου, 1955)

Η σχέση του ανθρώπου με τα μαθηματικά χαρακτηρίζεται σχεδόν πάντα από φανατισμό. Υπάρχουν εκείνοι -οι περισσότεροι- που, μη προσπαθώντας να προσεγγίσουν τη γοητεία τους, δηλώνουν ορκισμένοι εχθροί αυτού του άγνωστου πεδίου υποχρεωτικής γνώσης στη διάρκεια των σχολικών χρόνων. Είναι και αυτοί οι οποίοι, έχοντας την τύχη να γνωρίσουν χωρίς σπασμένους κρίκους την αλυσίδα που αποτελεί η μαθηματική επιστήμη, αναδεικνύονται σε φανατικούς οπαδούς της. Κάνουν τη μαθηματική σκέψη τρόπο ζωής... Γνωρίζοντας, φυσικά, ότι τα μαθηματικά δεν είναι τίποτε άλλο από συνύπαρξη της ιδεολογίας, του ρομαντισμού, του ρεαλισμού, της οργανωτικότητας. Για κάποιους είναι κάτι περισσότερο... Ο κόσμος τους... Η ίδια τους η ζωή... Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρής, από τους διαπρεπέστερους μαθηματικούς-ερευνητές του 20ού αιώνα, είναι ένας από αυτούς τους λίγους ανά τον πλανήτη.

Γόνος γνωστής οικογένειας της Κωνσταντινούπολης, μέλη της οποίας κατέλαβαν υψηλές θέσεις στην οθωμανική διοίκηση, προασπίζοντας από τις θέσεις αυτές τα συμφέροντα των Ελλήνων ομοεθνών τους, ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρής ή Καραθεοδωρή - όπως επικράτησε να λέγεται - αποτελεί έναν αξιόλογο εκπρόσωπο, μέσω της έρευνάς του, του μαθηματικού πνεύματος του 20ού αιώνα που χαρακτηρίζεται από μια στροφή στην κλασική εντέλεια των αρχαίων ελλήνων μαθηματικών.

Γιος του διπλωμάτη Στέφανου Καραθεοδωρή και της Δέσποινας Πετροκόκκινου, γεννιέται στο Βερολίνο στις 13 Σεπτεμβρίου 1873, όπου ο πατέρας του είναι πρεσβευτής της τότε Οθωμανικής Αυτοκρατορίας. Σε μικρή ηλικία χάνει τη μητέρα του και την ανατροφή του ίδιου, όπως και της αδελφής του Ιουλίας, αναλαμβάνει η γιαγιά του. Μεγαλώνει σε ένα ευρωπαϊκό, επιστημονικό και αριστοκρατικό περιβάλλον, με ζωντανά τα στοιχεία της ελληνορθόδοξης οικογενειακής καταγωγής. Μιλάει πολύ καλά ελληνικά, γαλλικά, γερμανικά και τουρκικά. Φοιτά στη Σχολή της Ριβιέρας και του Σαν Ρέμο. Στο γυμνάσιο των Βρυξελλών, από όπου αποφοιτά, νιώθει στο μάθημα της γεωμετρίας ότι η σχέση του με τα μαθηματικά θα είναι διά βίου.

Ένας διαγωνισμός μαθηματικών, στον οποίο καλείται η τάξη του να διαγωνιστεί επί δύο κατά σειρά χρόνια, αποδεικνύει τις μαθηματικές του ικανότητες. Αναδεικνύεται πρώτος και τις δύο χρονιές. Όνειρό του, η ενασχόληση με τα μαθηματικά. Ο πατέρας του θεωρεί τη μαθηματική επιστήμη «επάγγελμα χωρίς μέλλον». Δεν τον αφήνει να σπουδάσει το αγαπημένο του θέμα και ο Κωνσταντίνος, ακολουθώντας την πατρική προτροπή, σπουδάζει στη Στρατιωτική Σχολή του Βελγίου, από την οποία αποφοιτά ως αξιωματικός του Μηχανικού. Η αγάπη του για τα μαθηματικά αποτελεί όμως γι' αυτόν «σαράκι». Συνεχίζει να συμμετέχει σε διαγωνισμούς μαθηματικών, στους οποίους και διαπρέπει. Το 1898 έρχεται στην Αίγυπτο, όπου παραμένει για δυο χρόνια και εργάζεται ως μηχανικός --βοηθός μηχανικού αρχικά-- στο φράγμα του Ασουάν. Οι μαθηματικές αναζητήσεις αποδεικνύονται πολύ γοητευτικές για τον νεαρό Κωνσταντίνο Καραθεοδωρή, ο οποίος δεν κλείνει τα αυτιά του στις σειρήνες... Τον Ιούνιο του 1900, εγκαταλείπει την Αίγυπτο, τα φράγματα, το επάγγελμα του μηχανικού, για τη μεγάλη του αγάπη: τα μαθηματικά. Κάθεται ξανά στα θρανία της μαθηματικής σχολής των Πανεπιστημίων του Βερολίνου και του Γκέτιγκεν, όπου αναδεικνύεται διδάκτορας το 1908. Η διδακτορική του διατριβή «Περί των ασυνεχών λύσεων στο λογισμό των μεταβολών» είναι η πρώτη μελέτη η οποία ασχολείται συστηματικά με τη θεωρία των σποραδικών λύσεων, καθώς μέχρι τη στιγμή αυτή υπάρχουν μόνο περιορισμένα συμπεράσματα. Η μετέπειτα έρευνά του στον κλάδο αυτό αποφέρει σημαντικά αποτελέσματα σε σειρά άλλων τομέων. Την ίδια χρονιά, το 1908, παντρεύεται στην Κωνσταντινούπολη την Ευφροσύνη, το γένος Καραθεοδωρή, μακρινή συγγενή του. Από τον γάμο αυτόν αποκτά δύο παιδιά, τη Δέσποινα και τον Στέφανο.

Η ακαδημαϊκή του καριέρα περιλαμβάνει έδρες διδασκαλίας μαθηματικών στα γερμανικά πανεπιστήμια της Βόννης, του Ανοβέρου, του Μπρεσλάου, του Γκέτιγκεν, του Βερολίνου και του Μονάχου. Αναδεικνύεται έτσι σε κορυφαίο μαθηματικό παγκόσμιου επιπέδου. Το 1920, αναλαμβάνει κατ' εντολή του Ελευθέριου Βενιζέλου να οργανώσει το υπό ίδρυση Πανεπιστήμιο της Ιωνίας στη Σμύρνη, των Αθηνών και της Θεσσαλονίκης. Κατορθώνει να

διασώσει τη βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου της Σμύρνης και μετά τη Μικρασιατική Καταστροφή το 1922, μεταφέροντας τους τόμους της στο Πανεπιστήμιο Αθηνών. Το διάστημα 1922-1924 είναι καθηγητής μαθηματικών και μηχανικής στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Το 1924, εγκαθίσταται οριστικά στο Μόναχο. Επιστρέφει στην Ελλάδα το 1930, προκειμένου να συμβάλει στην αναδιοργάνωση των Πανεπιστημίων Αθηνών και Θεσσαλονίκης.
Πολύπλευρος και παραγωγικός μαθηματικός πια, ο Κ. Καραθεοδωρής βάζει τη σφραγίδα της επιτυχίας στα θέματα με τα οποία ασχολείται, τα οποία όμως λατρεύει... Το πεδίο της έρευνάς του, ευρύ. Λογισμός των μεταβολών, μερικές διαφορικές εξισώσεις, πραγματικές συναρτήσεις, μιγαδικές συναρτήσεις, γεωμετρική οπτική, θερμοδυναμική, γεωμετρία, θεωρία των συνόλων, αστρονομία, ειδική θεωρία της σχετικότητας του Α. Αϊνστάιν. Πρέπει να σημειωθεί η στενή επιστημονική συνεργασία και αλληλοεκτίμηση μεταξύ του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή και του Αϊνστάιν. Ο θείος 'Αλμπερτ τον θεωρεί δάσκαλό του... Δεν έχει σημασία ότι ο Καραθεοδωρής δεν είναι τόσο γνωστός στο ευρύ κοινό όσο ο Αϊνστάιν...

Εκτός από το πλήθος των πρωτότυπων επιστημονικών εργασιών που δημοσιεύει, πλουτίζει τη διεθνή μαθηματική βιβλιογραφία με σειρά συγγραμμάτων. Κοινό χαρακτηριστικό τους, η μαθηματική τους αυστηρότητα που συνδυάζεται με επιμελημένη επεξεργασία λεπτομερειών και, κυρίως, μια διαυγή διατύπωση των εννοιών και των αποδείξεων. Διερευνά προβλήματα μεταβολών των m-διάστατων επιφανειών εντός ενός n-διάστατου χώρου. Κάνει ευρεία χρήση των μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού ή πρώτης τάξης, των πολλαπλών ολοκληρωμάτων και των γεωμετρικών μεθόδων. Συμβάλλει με την έρευνά του στη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων. Ασχολείται με το θεώρημα του Εμίλ Πικάρ, περί προβλημάτων των συντελεστών με τις κανονικές οικογένειες συναρτήσεων πολλών μεταβλητών ή με τη σύμμορφη απεικόνιση... Στον Καραθεοδωρή οφείλεται η αναγνώριση της σπουδαιότητας θεωρήματος του Χέρμαν Σβαρτς, το οποίο δεν είχε έως τότε παρατηρηθεί. Η παρέμβασή του, όμως, σε συνδυασμό με άλλες μαθηματικές έρευνες, ανοίγει νέους ορίζοντες στη μαθηματική επιστημονική έρευνα, οι οποίοι οδηγούν στη μετονομασία από τον Καραθεοδωρή του εν λόγω θεωρήματος σε «λήμμα του Σβαρτς», όπως άλλωστε γίνεται γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία. Ο Καραθεοδωρής, ασχολούμενος με τις πραγματικές συναρτήσεις, εμπνέεται μια αξιωματική διατύπωση για τη μετρικότητα και το μέτρο των σημειοσυνόλων στο n-διάστατο ευκλείδειο χώρο. Εργάζεται με τον ίδιο ζήλο και όταν η «Γενική Ανάλυση» περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις και τις υπόλοιπες «Αναλύσεις». Στο πλαίσιο αυτό, επεξεργάζεται την αλγεβροποίηση της έννοιας του ολοκληρώματος.
Τα συγγράμματά του αποτελούν, από την εποχή του μέχρι τώρα, πηγή πληροφόρησης για τους μαθηματικούς... «Λογισμός των μεταβολών και μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης»... η πραγματεία που είχε προηγηθεί για το ίδιο θέμα, με τίτλο «Σύμμορφη απεικόνιση»... και δημοσιεύσεις, όμως, όπως οι «Πραγματικές συναρτήσεις»... Πολλές εργασίες του δημοσιεύονται λίγο μετά τον θάνατό του. Το διάστημα 1954-1957, η Βαυαρική Ακαδημία Επιστημών εκδίδει σε πέντε τόμους όλα τα συγγράμματά του. Το επιστημονικό έργο του επεκτείνεται σε πολλούς τομείς και της φυσικής ή της αρχαιολογίας. Οι εργασίες του στη φυσική αφορούν τη θερμοδυναμική, τη γεωμετρική οπτική, την οπτική γενικότερα, την ειδική σχετικότητα και τη μηχανική. Οι αρχαιολογικές του μελέτες αναφέρονται σε κατασκευές της Αρχαίας Ελλάδας και της Αρχαίας Αιγύπτου, ειδικότερα σε ναούς, πυραμίδες ή αρδευτικά έργα... Έγραψε 232 περίπου εργασίες, από τις οποίες δημοσιεύθηκαν οι 165. Όλες σχεδόν οι εργασίες του, όμως, αποτελούν θεμελιώδεις έρευνες εξαιρετικής έμπνευσης που τον αναδεικνύουν ως έναν από τους λίγους στην παγκόσμια επιστήμη. Έναν ρυμοτόμο της μαθηματικής διανόησης. Από το 1927, είναι μέλος της Ακαδημίας Αθηνών, ενώ στη συνέχεια ανακηρύσσεται μέλος των Ακαδημιών του Βερολίνου, του Γκέτινμπενγκ, του Μονάχου, της Μπολόνια και των Λιγκών της Ρώμης.
Για τον άνθρωπο Καραθεοδωρή, η κόρη του είπε πριν από λίγα χρόνια, μιλώντας σε επετειακή προς τιμήν του εκδήλωση: «Κάθε Κυριακή πηγαίναμε στη δεύτερη μεγαλύτερη εκκλησία του Μονάχου, η οποία είχε παραχωρηθεί στους Έλληνες. Ο πατέρας μου μας μεγάλωσε σαν Έλληνες. Πηγαίναμε σε γερμανικό σχολείο, αλλά δύο φορές την εβδομάδα ερχόταν στο σπίτι ο αρχιμανδρίτης και μας έκανε μαθήματα ελληνικών. Ο πατέρας μου, κάθε φορά που ερχόταν στην Ελλάδα, με έπαιρνε μαζί του. Στη Γερμανία, όταν με ρωτούσαν από πού είμαι, έλεγα με καμάρι ότι είμαι από την Ελλάδα, γιατί τότε τη θαύμαζαν την Ελλάδα...
Ο Κ. Καραθεοδωρής διατηρούσε τακτική αλληλογραφία με τον μαθητή του, Α. Αϊνστάιν. Την ύπαρξη της αλληλογραφίας αυτής, η κόρη του ανακάλυψε μετά τον θάνατο του πατέρα της. Κάποιες από τις επιστολές πουλήθηκαν, άγνωστο πώς... Σε μια από αυτές, που έμειναν στην κόρη του, ο Αϊνστάιν γράφει:

«Αγαπητέ κύριε συνάδελφε, βρίσκω θαυμάσιο τον υπολογισμό σας... Θα έπρεπε να δημοσιεύσετε τη θεωρία σε αυτή τη μορφή στα Χρονικά της Φυσικής, καθόσον οι φυσικοί κατά κανόνα αγνοούν αυτό το αντικείμενο, όπως κι εγώ άλλωστε. Με το γράμμα μου θα πρέπει να σας φαίνομαι σαν τον Βερολινέζο που μόλις ανακάλυψε το Crunewald και αναρωτιέται αν ζούσαν εκεί άνθρωποι πιο πριν. Αν θέλετε να μπείτε στον κόπο να μου εκθέσετε επιπλέον και τους κανονικούς μετασχηματισμούς, θα βρείτε σε μένα έναν ευγνώμονα και ευσυνείδητο ακροατή. Αν, όμως, λύσετε το πρόβλημα των κλειστών γραμμών του χρόνου, θα σταθώ μπροστά σας με σταυρωμένα χέρια... Πίσω από αυτό το ζήτημα κρύβεται κάτι που είναι αντάξιο του ιδρώτα των αρίστων».

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρής, ή Καραθεοδωρή, φεύγει στις 2 Φεβρουαρίου 1950. Ο κόσμος των μαθηματικών και της φυσικής τον θρηνεί...

*Από τις μαθήτριες Νέσσερη Ελευθερία και Χριστίνα Σκαμνέλου*

# Λέοναρντ Όιλερ

Ο **Λέοναρντ Όιλερ** (*Leonard Euler*, *15* Απριλίου *1707* – 18 Σεπτεμβρίου *1783*).

Γεννήθηκε στη Βασιλεία της Ελβετίας στις *15* Απριλίου *1707* και ήταν γιος ιερέα. Σπούδασε γεωμετρία στο πανεπιστήμιο της Βασιλείας. Σε ηλικία *20* ετών πήγε στην Αγία Πετρούπολη της Ρωσίας, όπου εργάστηκε για την οργάνωση της Ακαδημίας Επιστημών, έπειτα από πρόσκληση της αυτοκράτειρας Αικατερίνης Α'. Διορίστηκε καθηγητής της Φυσικής Φιλοσοφίας στο πανεπιστήμιο της Αγίας Πετρούπολης. Το *1744* τον προσκάλεσε ο Φρειδερίκος Β' της Πρωσίας στο Βερολίνο, για να αναλάβει διευθυντής του τμήματος των μαθηματικών της εκεί Ακαδημίας.

Τα τελευταία *17* χρόνια της ζωής του ο διάσημος μαθηματικός ήταν σχεδόν τυφλός. Αυτό, όμως, δεν τον εμπόδισε να εργάζεται. Η εκπληκτική μνήμη του σε συνδυασμό με τη διανοητική του διαύγεια, τού ήταν αρκετές για να πραγματοποιεί προφορικά τους υπολογισμούς του, τους οποίους υπαγόρευε στη γραμματέα του. Μάλιστα, την περίοδο της τύφλωσής του παρήγαγε το μισό από το συνολικό του έργο. Πέθανε στις *18* Σεπτεμβρίου *1783*. Ο μαθηματικός και φιλόσοφος Ντε Κοντορσέ είπε στον επικήδειο: «Ο Όιλερ σταμάτησε να ζει και να υπολογίζει».

Διακρίθηκε στα ανώτερα μαθηματικά και κυρίως στο διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό. Οι σπουδαιότερες εργασίες του αναφέρονται στην ανάλυση των ισοπεριμέτρων, στη συσχέτιση των κυκλικών και των εκθετικών συναρτήσεων, στη θεωρία της περιστροφής σώματος γύρω από σταθερό σημείο, στην αναλυτική γεωμετρία (την οποία συμπλήρωσε και τελειοποίησε), στη θεωρία των αριθμών κ.τ.λ. Ακόμη υπήρξε ο εισηγητής της συντομογραφίας και του συμβολισμού (τριγωνομετρία), κάνοντας πρώτος τη χρήση του συμβόλου e για τον προσδιορισμό της βάσης των φυσικών λογαρίθμων. Πολλοί μαθηματικοί όροι φέρουν το όνομά του, όπως η σταθερά του Όιλερ, ο αριθμός του Όιλερ (το γνωστό *e*), οι μεταβλητές, η γραμμή και η εξίσωση του Όιλερ κ.ά. Από τα έργα του σπουδαιότερα είναι: *Η μηχανή ή η επιστήμη της κίνησης* (*1736*), *Θεωρία των κινήσεων πλανητών και κομητών* (*1744*), *Εισαγωγή στην ανάλυση των απείρως μικρών*(*1748*, *2* τόμοι), *Γενικές αρχές του διαφορικού λογισμού* (*1755*), *Γενικές αρχές του ολοκληρωτικού λογισμού* (*1768 - 1774*), *Εγχειρίδιο άλγεβρας* (*1770*),*Θεωρία των κινήσεων της Σελήνης* (*1772*). Τα έργα του σήμερα ξεπερνούν τους 75 τόμους συνολικά. Σε αυτόν οφείλεται, ανάμεσα σε άλλα, και η καθιέρωση του συμβόλου *f(x)* για τις συναρτήσεις. Θεωρείται μάλιστα ο "πατέρας" του γνωστού παιχνιδιού σουντόκου, (Sudoku) αφού ο ίδιος διατύπωσε πρώτος τους κανόνες του. Για την ακρίβεια, το έργο του αποτελείται από *75* τόμους, συνολικά *45000* σελίδες μαθηματικών! Επίσης υπάρχουν *4000* χειρόγραφα (αλληλογραφία με διάσημους σύγχρονους του μαθηματικούς).

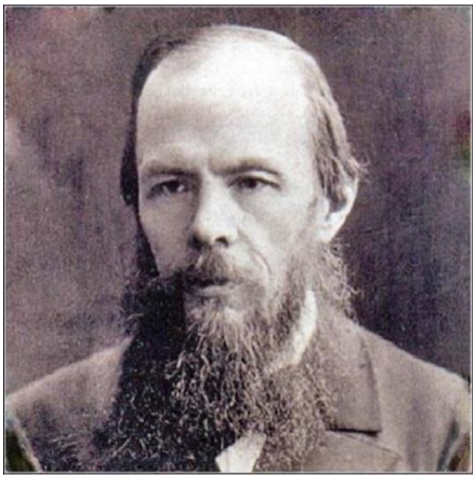
*( Η λύση του Sudoku θα δημοσιευτεί στο επόμενο τεύχος )*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 2 | | | | | |
| | 2 | 4 | | 9 | 7 | 5 | | 3 |
| | | 6 | | 8 | | | 7 | |
| | | | | 7 | | 6 | | |
| | 1 | | 5 | 4 | | | 2 | 9 |
| | 3 | 8 | 6 | 2 | 9 | 1 | 4 | |
| 4 | 8 | | 7 | 1 | 6 | 3 | | |
| 7 | 6 | | | 5 | | 4 | 8 | 1 |
| | | 1 | 4 | | 8 | 7 | | |

Ο πρωτοπόρος Ελβετός μαθηματικός και φυσικός Λέοναρντ Όιλερ ήταν το τιμώμενο πρόσωπο στην πρώτη σελίδα της Google στις *15* Απριλίου.


*Επιμελήθηκε η μαθήτρια Καζαντζίδη Μαρία*

# Ντοστογιέφσκι και μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες



Η Ευκλείδεια Γεωμετρία που μαθαίνουμε στο σχολείο είναι πιθανώς μια μοντέρνα έκδοση του περίφημου βιβλίου «**Στοιχεία**» που έγραψε γύρω στο *300* π.Χ. ο Ευκλείδης. Λέγεται ότι αυτό το βιβλίο είναι το πιο πολυδιαβασμένο μετά τη Βίβλο και θεωρείται ως το αρχέτυπο ενός αυστηρού συμπερασματικού συστήματος. Στο πρώτο από τα δεκατρία «κεφάλαια» των Στοιχείων διατυπώνονται εκτός από τους ορισμούς και *5* Αιτήματα (ή Αξιώματα) για την Γεωμετρία:

***Τα 5 Αιτήματα του Ευκλείδη***

***1ο Αίτημα:*** *Μπορούμε να φέρουμε μια ευθεία γραμμή από οποιοδήποτε σημείο προς οποιοδήποτε σημείο*

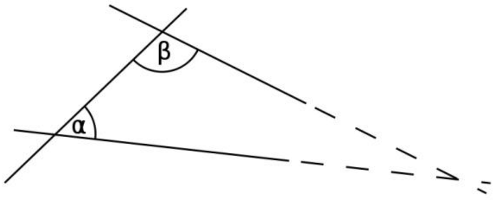
***2ο Αίτημα:*** *Κάθε πεπερασμένη ευθεία μπορεί να προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.*

***3ο Αίτημα:*** *Μπορούμε να γράψουμε έναν κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και ακτίνα.*

***4ο Αίτημα:*** *Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.*

***5ο Αίτημα:*** *Αν μια ευθεία που τέμνει δυο άλλες ευθείες γραμμές σχηματίζει εντός και επί τα αυτά γωνίες συνολικά λιγότερες από δυο ορθές, οι εν λόγω ευθείες, προεκτεινόμενες απεριόριστα, συναντώνται σε εκείνη την μεριά όπου σχηματίζονται οι γωνίες που είναι λιγότερες από δυο ορθές.*

Το *5ο* Αίτημα φαίνεται να είναι απόλυτα συμβατό με τη διαισθησή μας. Αλλά σε πολλούς μαθηματικούς (και όχι μόνο) στους επόμενους *21* αιώνες που ακολούθησαν μετά τον Ευκλείδη, υπήρχε η αίσθηση ότι πρόκειται για κάτι πιο πολύπλοκο για να ονομαστεί αίτημα και μάλλον θα έπρεπε να αποδειχθεί ως πρόταση.




***Πέμπτο Αίτημα:***

*Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες*

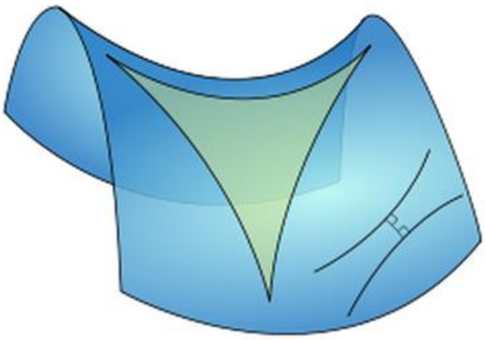
Πολλοί μαθηματικοί, που έμεναν ανικανοποίητοι από το *5ο* Αίτημα του Ευκλείδη προσπάθησαν να αποδείξουν ότι είναι εξαρτημένο, ότι δηλαδή μπορεί να εξαχθεί από τα άλλα τέσσερα αιτήματα. Πολλοί πίστεψαν ότι το είχαν πετύχει, πάντοτε όμως χρησιμοποιούσαν κάποια επιπλέον υπόθεση που είχε διαφύγει της προσοχής τους. Άλλοι μαθηματικοί διατύπωσαν την άποψη ότι θα έπρεπε να αντικατασταθεί από κάποιο πιο ευλογοφανές αίτημα.

Οδηγήθηκαν έτσι σε αξιώματα ισοδύναμα προς το *5ο* Αίτημα του Ευκλείδη, θεωρώντας ότι το νέο τους αξίωμα ήταν και απλούστερο στη διατύπωση και προφανέστερο στη διαίσθηση.

Για παράδειγμα οι επόμενες διατυπώσεις: «**από ένα σημείο εκτός δοθείσας ευθείας διέρχεται μόνο μία παράλληλη ευθεία ως προς την δοθείσα**» και «**το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι *180 ο*** » αποδεικνύονται ισοδύναμες με το *5ο* Αίτημα του Ευκλείδη.

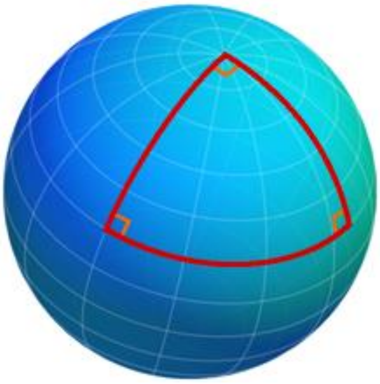
Ο Giovanni Girolamo Saccheri (*1667 – 1733*), ένας ισουίτης ιερέας και καθηγητής των μαθηματικών, στην προσπάθειά του να αποδείξει ότι το *5ο* Αίτημα του Ευκλείδη ήταν εξαρτημένο από τα άλλα τέσσερα, οδηγήθηκε σχεδόν στην ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας εκατό χρόνια πριν την τελική της ανακάλυψη. Σύμφωνα με τον J. L. Heath "ο Saccheri υπήρξε θύμα της προκατάληψης της εποχής του ότι η μόνη δυνατή γεωμετρία ήταν η Ευκλείδεια και παρουσιάζει το περίεργο θέαμα ενός ανθρώπου που ανεγείρει ένα οικοδόμημα πάνω σε καινούργια θεμέλια με σπουδή και εργατικότητα, σκοπεύοντας να το γκρεμίσει αμέσως μετά».

Ο Gauss (*1777 – 1855*) υπήρξε πιθανότατα ο πρώτος που αντιλήφθηκε ότι η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι εξίσου έγκυρη με την Ευκλείδεια, και ως λογικό σύστημα και ως περιγραφή του σύμπαντος. Ενώ οι Nikolai Lobachevsky και János Bolyai είχαν δημοσιεύσει τις ανακαλύψεις τους σχετικά με την μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, το *1829* και *1832*, αντίστοιχα, ο Gauss κατείχε την αλήθεια ήδη από το *1813*. Δεν του αναγνωρίστηκε η ανακάλυψη, διότι δεν δημοσίευσε τα ευρήματά του.



*Στην Υπερβολική Γεωμετρία το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερη από 180 μοίρες*

Σύμφωνα με την νέα αυτή γεωμετρία (Υπερβολική Γεωμετρία), **από ένα σημείο εκτός δοθείσης ευθείας άγονται τουλάχιστον δυο διαφορετικές παράλληλες προς την δοθείσα ευθεία.** Και σαν να μην έφτανε αυτό, το *1854*, εμφανίζεται ο Bernhard Riemann για να προτείνει μια ακόμη διαφορετική γεωμετρία (Σφαιρική Γεωμετρία) στην οποία **δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες! Όλες οι ευθείες τέμνονται ανά δυο σε δυο σημεία.** Παρότι η Υπερβολική και η Σφαιρική Γεωμετρία έρχονταν σε αντίθεση με την ανθρώπινη διαίσθηση, φαίνονταν να είναι εξίσου συνεπείς με την Ευκλείδειο Γεωμετρία.



*Στην Σφαιρική Γεωμετρία το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από 180 μοίρες*

Η σπουδαιότητα της ανακάλυψης αυτής ήταν ανυπολόγιστη, διότι για περισσότερο από δυο χιλιάδες χρόνια κυριαρχούσε η αίσθηση ότι η ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν απαραίτητα η γεωμετρία του χώρου. Τα Μαθηματικά και η Φυσική συνυφαίνονταν τόσους αιώνες με το νήμα αυτής της πίστης. Οι νέες Γεωμετρίες έδειξαν ότι υπάρχουν και άλλες περιγραφές του χώρου προσιτές στην ανθρώπινη νόηση.

Μέχρι τότε επικρατούσαν οι απόψεις του μεγάλου φιλόσοφου **Immanuel Kant** (*1724 – 1804*) που είχε διατυπώσει στην «**Κριτική του Καθαρού Λόγου**». Σύμφωνα με τον Kant η Γεωμετρία είναι η μελέτη του χώρου, και η γνώση μας για τον χώρο δεν είναι εμπειρική αλλά μάλλον συνέπεια του τρόπου με τον οποίο είναι δομημένο το μυαλό μας. Μάλιστα η δομή του μυαλού μας είναι τέτοια ώστε η Ευκλείδεια Γεωμετρία να αποτελεί τη μόνη Γεωμετρία που αυτό μπορεί να συλλάβει. Κατά συνέπεια, ο λόγος που κάνει κάποιον να αισθάνεται μια φυσική ροπή στην κατεύθυνση της αποδοχής του Ευκλείδειου *5ου* Αιτήματος δεν οφείλεται σε πειραματικές παρατηρήσεις αλλά στη δομή του εγκεφάλου μας.

Αυτή η θεωρία μετέτρεψε τις διατυπώσεις της Γεωμετρίας (αιτήματα και προτάσεις) σε κάτι σπάνιο και πολύτιμο – σε a priori συνθετικές κρίσεις. «A priori» σημαίνει ότι προηγούνται της εμπειρίας, ότι η επαλήθευσή τους δεν απαιτεί την εμπειρία (κάτι καλό, αφού η εμπειρία ενέχει τον κίνδυνο του λάθους). «Συνθετικές» σημαίνει ότι η επαλήθευσή τους απαιτεί κάτι περισσότερο από τη σημασία των λέξεων (άρα δεν είναι τετριμμένη). Στην περίπτωση της Γεωμετρίας, αυτό το «κάτι» είναι η δομή του εγκεφάλου, η οποία τον υποχρεώνει να τη δει ως Ευκλείδεια. Βέβαια η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία έδειξε ότι οι ισχυρισμοί του Kant δεν ήταν ορθοί.

Το *5ο* Αίτημα του Ευκλείδη και οι νέες Γεωμετρίες ξέφυγαν από τα στενά όρια της μαθηματικής κοινότητας του *19ου* αιώνα και έγιναν θέματα διαφωνιών και συζήτησης στα ευρωπαϊκά σαλόνια.

Αυτό αποδεικνύεται στο παρακάτω απόσπασμα από τους «**Αδελφούς Καραμαζώφ**» του **Φιόντορ Ντοστογιέφσκι** (*1821 – 1881*), που έγραψε στην διετία *1879-1880*. Ο σκοτεινός ήρωας του μυθιστορήματος, Ιβάν Καραμαζώφ, επιχειρηματολογεί υπέρ της Καντιανής άποψης για την Ευκλείδεια Γεωμετρία συνδέοντάς την με την ύπαρξη ή όχι του Θεού:

«… Ωστόσο, να τι πρέπει να σημειώσω: αν ο Θεός υπάρχει κι αν πράγματι δημιούργησε τη γη, τότε, όπως μας είναι γνωστό, **τη δημιούργησε κατά την ευκλείδεια γεωμετρία, και τον ανθρώπινο νου με τη δυνατότητα κατανόησης μόνο των τριών διαστάσεων του χώρου.Παρ' όλα αυτά, υπήρξαν και υπάρχουν ακόμα και σήμερα γεωμέτρες και φιλόσοφοι, και μάλιστα από τους πιο αξιόλογους, που αμφιβάλλουν ότι όλη οι οικουμένη ή, ευρύτερα, όλο το σύμπαν δημιουργήθηκε μόνον κατά την ευκλείδεια γεωμετρία, τολμούν μάλιστα να σκέφτονται ότι δυο παράλληλες ευθείες, οι οποίες κατά τον Ευκλείδη δεν μπορούν με τίποτα να συναντηθούν στη Γη, ίσως και να συναντιούνταν κάπου στο άπειρο.**

**Εγώ, αγαπητέ μου, κατέληξα στο ότι, αν δεν μπορώ να το καταλάβω αυτό, πως μπορώ να καταλάβω τα σχετικά με το Θεό; Παραδέχομαι ταπεινά ότι δεν διαθέτω τις ικανότητες να λύσω τέτοια ζητήματα, το μυαλό μου είναι ευκλείδειο, γήινο, άρα πως θα λύσω κάτι που δεν είναι του κόσμου αυτού; Μα κι εσένα σε συμβουλεύω να μην το σκέφτεσαι ποτέ αυτό φίλε μου και περισσότερο σχετικά με το Θεό: υπάρχει ή δεν υπάρχει; Όλα αυτά είναι θέματα απολύτως δυσανάλογα ενός νου που έχει φτιαχτεί για να κατανοεί μόνον τρεις διαστάσεις.**

**Έτσι, δέχομαι το Θεό, κι όχι μόνο με προθυμία, μα ακόμα περισσότερο, δέχομαι και τη σοφία του, και το σκοπό του, που μας είναι παντελώς άγνωστα, πιστεύω στην τάξη, στο νόημα της ζωής, πιστεύω στην αιώνια αρμονία, στην οποία θα ενσωματωθούμε, λέει, όλοι, πιστεύω στο Λόγο, προς τον οποίο τείνει η οικουμένη και ο οποίος «ήν προς τον Θεόν», και είναι ο ίδιος ο Θεός, και τα λοιπά και τα λοιπά, και ούτω καθεξής επ' άπειρον. Λόγια έχουν ειπωθεί πολλά σχετικά με αυτό. Μου φαίνεται ότι είμαι σε καλό δρόμο ε;**

**Ε, λοιπόν, να φανταστείς ότι σε τελική ανάλυση αυτόν τον θεϊκό κόσμο δεν τον αποδέχομαι, και παρότι ξέρω ότι υπάρχει, δεν τον αποδέχομαι καθόλου. Δεν είναι ο Θεός που δεν αποδέχομαι, αλλά τον κόσμο που έχει δημιουργήσει, τον κόσμο του Θεού δεν αποδέχομαι και δεν μπορώ να συμφωνήσω να τον αποδεχτώ.**

**Εξηγούμαι: είμαι πεπεισμένος, σαν νεογέννητο, ότι οι οδύνες θα καταλαγιάσουν, ότι η προσβλητική κωμικότητα των ανθρώπινων αντιθέσεων θα εξαφανιστεί, σαν θλιβερός αντικατοπτρισμός, σαν αρρωστημένη επινόηση ενός αδύναμου και τόσο μικρού όσο το άτομο ενός ανθρώπινου ευκλείδειου νου, ότι, τέλος, στο φινάλε του κόσμου, τη στιγμή της αιώνιας αρμονίας, θα υπάρξει και θα εμφανιστεί κάτι τόσο πολύτιμο, που είναι αρκετό για όλες τις καρδιές, για τον κατευνασμό όλων των παρεξηγήσεων, την εξαγορά όλων των κακουργημάτων των ανθρώπων, όλου του αίματός τους που χύθηκε εξαιτίας τους, αρκετό και να δικαιολογήσει όλα όσα συνέβησαν με τους ανθρώπους … μα ακόμα, ακόμα κι αν υπάρξει και εμφανιστεί, εγώ δεν το αποδέχομαι και δεν θέλω να το αποδεχτώ! Ακόμα κι αν οι παράλληλες ευθείες συναντηθούν και το δω με τα μάτια μου, το δω και πω ότι συναντήθηκαν, παρ' όλα αυτά, δεν θα το αποδεχτώ. Αυτή είναι η δική μου ουσία, αυτή είναι η θέση μου.»**

***Πηγές:***

1. *Η φύση και η δύναμη των Μαθηματικών, Donald M. Davis, μετάφραση Δ. Καραγιαννάκης, Μ. Μαγειρόπουλος, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001*
2. *ΑΔΕΛΦΟΙ ΚΑΡΑΜΑΖΩΦ, ΦΙΟΝΤΟΡ ΝΤΟΣΤΟΓΙΕΦΣΚΙ, μετάφραση Ελένη Μπακοπούλου, εκδόσεις ΙΝΔΙΚΤΟΣ, 2011*

*Επιμελήθηκε ο μαθητής Δημήτρης Πάκος*

# Τελειότητα

«Οι τέλειοι αριθμοί είναι τόσο σπάνιοι όσο και οι τέλειοι άνθρωποι.»

G.H. Hardy

Ένας αριθμός λέγεται τέλειος όταν το άθροισμα των διαιρετών του( εκτός του ίδιου) μας δίνει τον αριθμό.
Για παράδειγμα, ο αριθμός *28* είναι τέλειος γιατί οι διαιρετές του *28* είναι *1,2,4,7,14* και το άθροισμα αυτών: *1+2+4+7+14=28* Οι πρώτοι οκτώ τέλειοι αριθμοί είναι:
•*6*
•*28,*
•*496,*
•*8128,*
•*33550336,*
•*8589869056,*
•*137438691328,*
•*2305843008139952128,*
•*2658455991569831744654692615953842176,*
•*191561942608236107294793378084303638130997321548169216,*
•*13164036458569648337239753460458722910223472318386943117783728128*,
Οι τέλειοι αριθμοί είναι πολύ σπάνιοι αφού υπάρχουν μόνο *3* τέτοιοι αριθμοί μικρότεροι του *1.000*, ένας τέλειος μεταξύ *1001 – 10.000*, ενώ μεταξύ *10.001 – 100.000.000* εντοπίζουμε μόνο ακόμα ένα τέλειο. Μέχρι σήμερα έχουν ανακαλυφθεί μερικές δεκάδες τέλειοι με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών, αφού οι μεγαλύτεροι από αυτούς έχουν εκατομμύρια ψηφία.

*Φιφή Χριστίνα*

# Ο Αριστοφάνης σατιρίζει τα μαθηματικά της εποχής του!

Ο Αριστοφάνης ήταν ένας από τους πιο πετυχημένους κωμωδιογράφους της εποχής του. Γενικά το έργο του αντανακλά τα ενδιαφέροντα της εποχής, ποικίλλοντας από σκληρά σχόλια για τον μακροχρόνιο πόλεμο της Αθήνας με τη Σπάρτη μέχρι ασεβείς προσωπογραφίες δικαστικών, φιλοσόφων, ποιητών και μαθηματικών. Στους *Όρνιθες* διακωμωδεί τον Μέτωνα. Ο Μέτωνας είχε ικανότητες μηχανικού και αστρονόμου, πολεοδόμου και αρχιτέκτονα. Γνωρίζουμε ότι ήταν υπεύθυνος για την αναμόρφωση του αθηναϊκού ημερολογίου. Ο Μέτων έγινε αντικείμενο αστεϊσμών από τον Αριστοφάνη επειδή ασχολούνταν με ένα είδος μαθηματικών που δεν θεωρούνταν σημαντικά και ήταν δύσκολο να τα καταλάβει κάποιος. Ας δούμε τον παρακάτω διάλογο από το έργο του Αριστοφάνη :

***ΜΕΤΩΝ***: Να 'μαι κι εγώ!
***ΠΕΙΣΘΕΤΑΙΡΟΣ***: Άλλος μπελάς και τούτος! Τι θες εδώ; Βρήκες καμιά εφεύρεση σπουδαία; Τι μας κουβαλήθηκες εδώ;
***ΜΕΤΩΝ***: Ήρθα να μετρήσω τον αέρα σας, να βρω τα στρέμματα που πιάνει.
***ΠΕΙΣΘΕΤΑΙΡΟΣ***: Θεός φυλάξει! Ποιος είσαι εσύ;
***ΜΕΤΩΝ***: Ποιος είμαι εγώ; Ο Μέτων, με ξέρει όλη η Ελλάδα!
***ΠΕΙΣΘΕΤΕΡΟΣ :*** Μπα; Και τι είναι όλα αυτά;
***ΜΕΤΩΝ***: Τα σύνεργα για να μετρήσω τον αέρα που η γη στριφογυρίζει. Κοίτα λοιπόν , θα βάλω τον κανόνα τον κυρτό, ύστερα θα καρφώσω τον διαβήτη . . . Κατάλαβες;
***ΠΕΙΣΘΕΤΑΙΡΟΣ :*** Ούτε λέξη.
***ΜΕΤΩΝ*** : Μετά θα βάλω τον κανόνα τον ορθό κι ο κύκλος μας τετράγωνο θα γίνει. Στο κέντρο θα είναι η αγορά κι εκεί οι δρόμοι θα φτάνουν από όλες τις μεριές όπως τ' αστέρια, που φαντάζουν στρογγυλά, αλλά παντού οι ακτίνες τους πηγαίνουν.
***ΠΕΙΣΘΕΤΑΙΡΟΣ***: Λοιπόν ο Μέτωνας είναι ένας Θαλής σωστός!

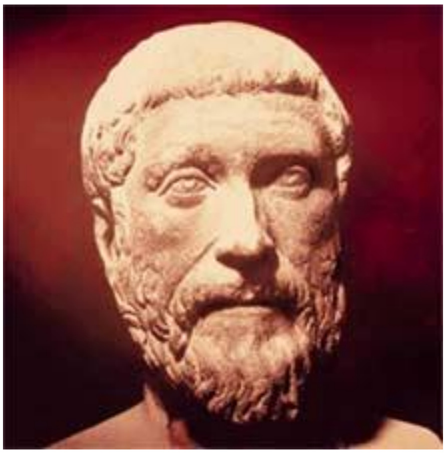
Σε ένα άλλο έργο του ο Αριστοφάνης διακωμωδεί την νέα πνευματική εκπαίδευση των σοφιστών :

***ΣΤΡΕΨΙΑΔΗΣ :*** Κι αυτό εδώ τι είναι;
***ΜΑΘΗΤΗΣ***: Αυτά; Γεωμετρία.
***ΣΤΡΕΨΙΑΔΗΣ***: Ωραία. Πού χρησιμεύει όμως;
***ΜΑΘΗΤΗΣ***: Για να καταμετρήσουμε τη γη.
***ΣΤΡΕΨΙΑΔΗΣ***: Εννοείς τη γη των κληρούχων;
***ΜΑΘΗΤΗΣ***: Όχι μόνο αλλά ***ολόκληρο τον κόσμο.***
***ΣΤΡΕΨΙΑΔΗΣ :*** Θαυμάσια: Είναι λοιπόν μια χρήσιμη και δημοκρατική εφεύρεση η γεωμετρία.

Ο κληρούχος ήταν ένας άποικος στρατιώτης που λαμβάνει γη ως αμοιβή για τη θητεία του. Στην μετάφραση χάνεται το λογοπαίγνιο που χρησιμοποιεί ο Αριστοφάνης. Η έκφραση ***"ολόκληρο τον κόσμο"*** αποδίδεται στο αρχαίο κείμενο ***"την σύμπασαν"*** που σημαίνει για όλους. Εδώ ο Αριστοφάνης υπαινίσσεται ότι η διανομή γης θα έπρεπε να γίνεται για όλους και μετά να καταμετρείται από τους γεωμέτρες. Βέβαια το βαθύτερο νόημα αυτής της σάτιρας είναι ότι ο μαθητής λέει ότι η γεωμετρία ασχολείται με γενικά και αφηρημένα πράγματα αλλά ασφαλώς όχι με τη λύση των οικονομικών προβλημάτων του κόσμου.

Άλλωστε στην εποχή εκείνη υπήρχε και από άλλους συγγραφείς μια κριτική και δυσπιστία για τα ζητήματα με τα οποία ασχολούνταν οι γεωμέτρες όπως τον τετραγωνισμό του κύκλου, τα οποία δεν σήμαιναν τίποτα για τις πρακτικές ανάγκες των ανθρώπων. Ο Διογένης ο Κυνικός αναρωτιόταν μήπως ***" οι μαθηματικοί ασχολούνταν με τον ήλιο και τη σελήνη, αδιαφορώντας για τα καθημερινά πράγματα.*** Ο Ισοκράτης ενώ δεχόταν ότι η γεωμετρία μπορούσε να θεωρηθεί ένα πνευματικό γύμνασμα για τους νέους παρά ταύτα : ***" οι περισσότεροι θεωρούν αυτές τις σπουδές κενές συζητήσεις και λεπτολογίες επειδή κανένα από αυτά τα πράγματα δεν είναι χρήσιμο στην ιδιωτική και στην δημόσια ζωή".*** Προειδοποιούσε επίσης για τους κινδύνους της υπερβολικής χρήσης των μαθηματικών η οποία θα μπορούσε να εμποδίσει την αρμονική ανάπτυξη τους. Επίσης ότι η σχολαστική ακρίβεια των μαθηματικών απομακρύνει την χρησιμότητα τους και δεν είναι πάντα αναγκαία. Κατά τον Πλάτωνα βέβαια πρέπει να διαχωρίσουμε τα μαθηματικά σε δύο δρόμους. Έχουν διπλή ιδιότητα. Υπάρχουν από τη μια μεριά τα μαθηματικά για τους πολλούς , τους λιανοπωλητές και τους εμπόρους που αποβλέπουν στο κέρδος. Από την άλλη υπάρχουν η αριθμητική εκείνη και η φιλοσοφική γεωμετρία για τους λίγους. Καταλήγει στο συμπέρασμα : ***" οι τέχνες και τα μαθηματικά που εμπνέονται από τους πραγματικούς φιλοσόφους είναι απείρως ανώτερες σε ακρίβεια και αλήθεια σχετικά με τα μέτρα και τους αριθμούς".*** Επηρεασμένη η ελληνική σκέψη από τον Πλάτωνα συνδέει τα μαθηματικά με τη φιλοσοφία και θεωρεί ότι οι φιλόσοφοι οφείλουν να έχουν την εποπτεία των μαθηματικών.

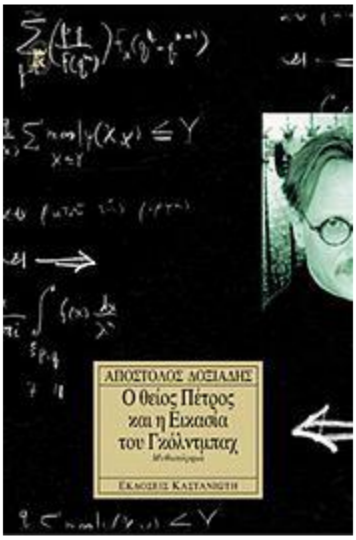
*Από το μαθητή Κωνσταντίνο Φώτο*



*Μέτων ο Αθηναίος*

# Μαθηματικά και λογοτεχνία

Σε αυτή τη στήλη θέλοντας να αναδείξουμε την επίδραση των μαθηματικών στη λογοτεχνία παρουσιάζουμε κάθε φορά βιβλία που αναδεικνύουν αυτήν την σχέση μαθηματικών και λογοτεχνίας. *Επιμελείται η μαθήτρια Παβέλη Ελένη*




### Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ

**Ο θείος Πέτρος και η Εικασία του Γκόλντμπαχ** είναι μυθιστόρημα του Έλληνα συγγραφέα Απόστολου Κ. Δοξιάδη που εκδόθηκε για πρώτη φορά το *1992.*
Το βιβλίο ασχολείται με την σχέση ενός νεαρού με τον αποτραβηγμένο από τον κόσμο μαθηματικό θείο του, τον παράξενο θείο Πέτρο, ο οποίος προσπαθεί να αποδείξει ότι κάθε άρτιος θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του δύο μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών, ένα διάσημο άλυτο πρόβλημα των μαθηματικών γνωστό ως η Εικασία του Γκόλντμπαχ.
Στο τέλος του μυθιστορήματος, ο μοναχικός θείος Πέτρος πεθαίνει, χωρίς ποτέ κανείς να μάθει αν είχε πράγματι αποδείξει το πρόβλημα που τον απασχολούσε για πάρα πολλά χρόνια.
Η πρώτη έκδοση του μυθιστορήματος βγήκε σε τρεις ανατυπώσεις, αλλά δεν γνώρισε μεγάλη εμπορική επιτυχία. Οι Έλληνες κριτικοί το υποδέχτηκαν με αμφίσημα ή και αρνητικά σχόλια. Το *2000* κυκλοφόρησε στα αγγλικά σε μετάφραση του ίδιου του συγγραφέα, και στα γαλλικά. Η αγγλική μετάφραση έγινε δεκτή με πολύ ευνοϊκά σχόλια από τον διεθνή και τον ελληνικό Τύπο. Το βιβλίο κυκλοφόρησε ξανά στα ελληνικά το *2001* σε αναθεωρημένη έκδοση με πολύ μεγάλη επιτυχία. Ακολούθησαν και άλλες μεταφράσεις σε είκοσι πέντε περίπου γλώσσες.

# Η Εικασία του Γκόλντμπαχ

*Επιμελήθηκε η μαθήτρια Πιέτα Δήμητρα*

Η **εικασία του Γκόλντμπαχ** είναι ένα από τα παλιότερα άλυτα προβλήματα της θεωρίας αριθμών και γενικότερα των μαθηματικών. Εκφράζεται ως εξής:

*Κάθε άρτιος θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών, έτσι ώστε έτσι ώστε για κάθε* $n \geqq 2$, $2n = p + q$ *, όπου* $p$, $q$ *πρώτοι αριθμοί.*

Για παράδειγμα,

$4 = 2 + 2$

$6 = 3 + 3$

$8 = 3 + 5$

$10 = 3 + 7 = 5 + 5$

$12 = 5 + 7$

$14 = 3 + 11 = 7 + 7$ κτλ.

Στις *7* Ιουνίου *1742* ο Κρίστιαν Γκόλντμπαχ έστειλε μία επιστολή στον Λέοναρντ Όιλερ, στην οποία έκανε μια πρώτη αναφορά στην εξής εικασία: *Κάθε άρτιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων.*

Θεωρούσε βέβαια ως δεδομένο ότι το *1* είναι πρώτος αριθμός, σύμβαση που μεταγενέστερα εγκαταλείφθηκε. Έτσι σήμερα η αρχική θεωρία του Goldbach θα γραφόταν ως εξής
*Κάθε περιττός μεγαλύτερος του 5 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τριών πρώτων.*
Ο Όιλερ απάντησε με μία ισοδύναμη εκδοχή της εικασίας:
*Κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων,*
προσθέτοντας ότι το δέχεται ως ένα πλήρως ορισμένο θεώρημα ("ein ganz gewisses Theorema"), παρά το γεγονός ότι δεν είναι σε θέση να το αποδείξει. Αυτή η προγενέστερη εικασία είναι σήμερα γνωστή ως "τριαδική" εικασία του Γκόλντμπαχ, ενώ η μεταγενέστερη ως "ισχυρή" ή "δυαδική" εικασία του Γκόλντμπαχ. Η εικασία ότι όλοι οι περιττοί αριθμοί μεγαλύτεροι του 9 μπορούν να γραφτούν ως άθροισμα τριών περιττών πρώτων αριθμών καλείται ως η "αδύναμη" εικασία του Γκόλντμπαχ. Και οι δύο παραμένουν άλυτες μέχρι σήμερα.

### Προσπάθειες απόδειξης

Όπως με πολλές άλλες εικασίες των μαθηματικών, υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός από διαδεδομένες αποδείξεις της εικασίας του Γκόλντμπαχ, από τις οποίες όμως καμία δεν έχει γίνει ακόμα αποδεκτή από την μαθηματική κοινότητα. Ο εκδοτικός οίκος "Faber and Faber" προσέφερε το βραβείο του ενός εκατομμυρίου δολαρίων σε όποιον αποδείκνυε την εικασία του Γκόλντμπαχ μέσα στο χρονικό διάστημα από τις *10* Μαρτίου *2000* μέχρι τις *20* Μαρτίου *2002*, αλλά κανείς δεν τα κατάφερε και έτσι η εικασία παραμένει ακόμα και μέχρι σήμερα ανοιχτή.

# Υπάρχει Νόμπελ Μαθηματικών;


Τα βραβεία Νόμπελ (ή Νομπέλ για τους γαλλομαθείς, αφού ο Alfred Nobel έζησε στο Παρίσι για πολλά χρόνια) θεσπίστηκαν και πήραν το όνομα τους από τον προαναφερθέντα Σουηδό χημικό, εφευρέτη της νιτρογλυκερίνης και του δυναμίτη. Ο Nobel, ένας πάμπλουτος βιομήχανος αλλά φιλειρηνιστής, είχε γράψει στη διαθήκη του ότι επιθυμεί το *95%* της περιουσίας του να μοιραστεί στους καλύτερους εκπρόσωπους της Ιατρικής, της Χημείας, της Φυσικής, της Ειρήνης και της Λογοτεχνίας. Και έτσι τα *5* αυτά βραβεία δίνονται από το *1901* σε ετήσια βάση. Ο Nobel πέθανε το *1896*, αλλά έκαναν πέντε χρόνια μέχρι να καθιερώσουν τα βραβεία, καθώς στην αρχή δυσκολεύτηκαν να καταλάβουν τι εννοούσε στη διαθήκη του και σε ποιον ακριβώς έπρεπε να τα δώσουν.

Όλα τα βραβεία δίνονται στην Στοκχόλμη, εκτός από το Νόμπελ Ειρήνης που δίνεται στο Όσλο της Νορβηγίας. Αυτό γίνεται επειδή ο Nobel δεν εμπιστευόταν τους Σουηδούς βουλευτές. Δίνονται κάθε χρόνο στις *10* Δεκεμβρίου (η επέτειος θανάτου του ιδρυτή τους). Στη Σουηδία θεωρείται πολύ σημαντικό γεγονός, καθηλώνοντας το *90%* των Σουηδών στις τηλεοράσεις τους την ημέρα της τελετής. Το βραβείο, εκτός από τη φήμη, είναι ένα χρυσό μετάλλιο, ένα δίπλωμα και περίπου *1.000.000* ευρώ.

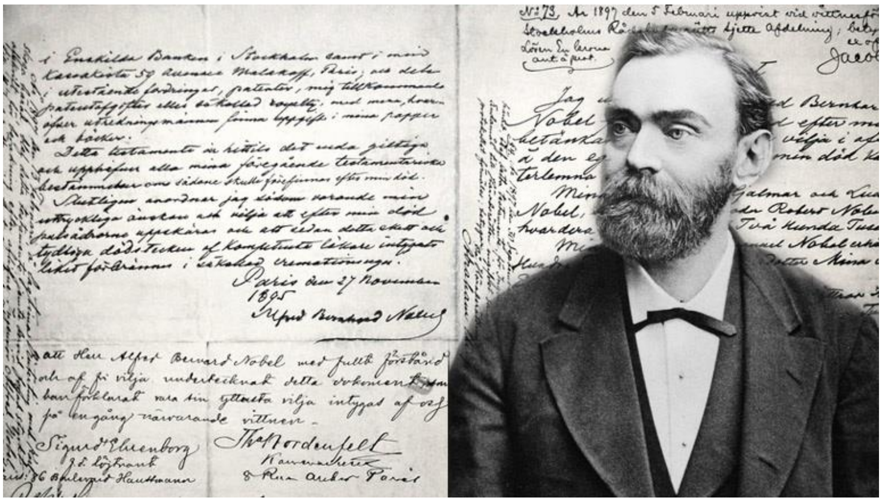
Βέβαια το εμφανές και σίγουρα παράξενο είναι ότι από τη λίστα των βραβείων λείπουν τα Μαθηματικά. Ο λόγος του αποκλεισμού τους δεν έχει αποσαφηνιστεί ακόμα και μάλλον ούτε πρόκειται. Άλλοι λένε ότι ο Nobel δεν είχε τα Μαθηματικά σε ιδιαίτερη υπόληψη, τα έβρισκε πολύ θεωρητικά και έξω από το πνεύμα των βραβείων του. Η πιο διαδεδομένη πάντως εκδοχή (ίσως και λόγω της ίντριγκας που τη συνοδεύει) είναι αυτή κατά την οποία ο Nobel ζήλευε τον συμπατριώτη του μαθηματικό Gost Mittag-Leffler επικεφαλή του πανεπιστημίου της Στοκχόλμης, καθώς ο δεύτερος είχε κερδίσει τη γυναίκα που ήταν ερωτευμένος ο πρώτος.

Αρκετά αργότερα το *1968*, η τράπεζα της Σουηδίας καθιέρωσε και το βραβείο των Οικονομικών Επιστημών στη μνήμη του Nobel, με τα εφαρμοσμένα μαθηματικά να περικλείονται μέσα σε αυτές, όπου και βρήκαν καταφύγιο μαθηματικοί όπως ο John Nash.

Νόμπελ των μαθηματικών θεωρείται το μετάλλιο Φιλντς που θεσπίστηκε το *1936* από τον Καναδό μαθηματικό Τζον Φιλντς και περιλαμβάνει αντίστοιχου ύψους χρηματικό ποσό με τα Νόμπελ. Δίνεται κάθε *4* χρόνια και σε αντίθεση με τα Νόμπελ που συνήθως απονέμονται σε επιστήμονες προς το τέλος της καριέρας τους (ως επιβράβευση), με τα μετάλλια Φιλντς βραβεύονται μαθηματικοί ως *40* χρονών (ως κίνητρο). Θεωρείται το ανώτερο τρόπαιο στον μαθηματικό κόσμο και μόνο ένας, ο ιδιόρυθμος ερημίτης Ρώσος μαθηματικός Γκριγκόρι Πέρελμαν , που έλυσε μετά από *100* χρόνια την υπόθεση του Poincare στην αλγεβρική τοπολογία, αρνήθηκε και το βραβείο και τα χρήματα, αν και πάμπτωχος.

Πιο σύγχρονο αλλά εξίσου σημαντικό είναι το βραβείο Άμπελ, το οποίο πήρε το όνομα του από τον Νορβηγό μαθηματικό Νιλς Χέρνικ Άμπελ, γνωστό για την ανακάλυψη της θεωρίας ομάδων. Απονεμήθηκε για πρώτη φορά το *2003* και πολύ γρήγορα έγινε ισοδύναμο με το Νόμπελ μεταξύ των μαθηματικών, συνοδευόμενο επίσης με το ποσό των *1.000.000* δολαρίων. Φέτος τιμήθηκε με αυτό ο *80*χρονος Αμερικανός μαθηματικός John Milnor για τις πρωτοποριακές ανακαλύψεις του στην τοπολογία, τη γεωμετρία και την άλγεβρα.

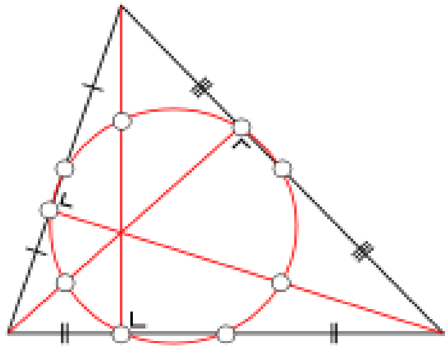
Για την ιστορία, ο μαθηματικός και φιλόσοφος Bertrand Russel είχε βραβευθεί τη δεκαετία του *1930* με Νόμπελ Λογοτεχνίας.



*Alfred Nobel*

*Επιμελήθηκαν οι μαθητές Γιώργος & Ευρώπη Ηλιοπούλου*

# Κύκλος των Εννέα Σημείων

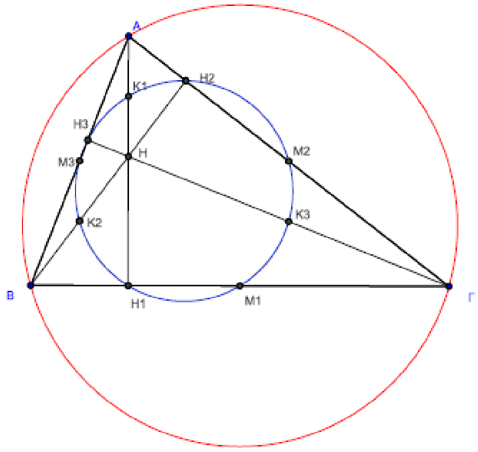


*Για τους μαθητές της Α και Β Λυκείου, επιμέλεια Σαρδελή Κατερίνα*

Στη γεωμετρία , ο **κύκλος των εννέα σημείων** είναι ένας κύκλος που μπορεί να κατασκευαστεί σε οποιοδήποτε δεδομένο μη ισόπλευρο τρίγωνο . Ονομάζεται έτσι επειδή περνά μέσα από εννέα "σημαντικά" σημεία που ορίζονται από το τρίγωνο. Αυτά τα εννέα σημεία είναι τα εξής:

- Το μέσο της κάθε πλευράς του τριγώνου
- Το ίχνος του κάθε ύψους του τριγώνου
- Το μέσο κάθε ευθύγραμμου τμήματος που ορίζεται από την κορυφή του τριγώνου και το ορθόκεντρο αυτού.

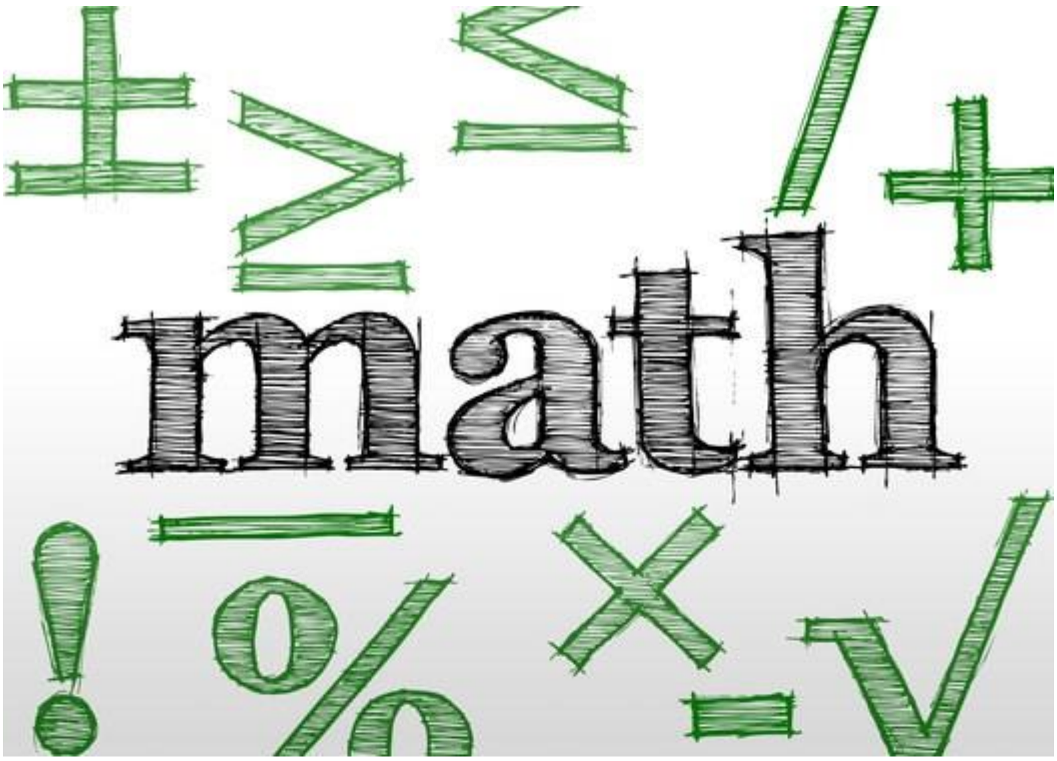
Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα ύψη του είναι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΗ_1$, $ΒΗ_2$ και $ΓΗ_3$ και τα μέσα των πλευρών του είναι τα σημεία $Μ_1$, $Μ_2$ και $Μ_3$. Το ορθόκεντρο (σημείο τομής των υψών ) είναι το σημείο $Η$.




Παρατηρούμε ότι υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τα σημεία $Η_1$, $Η_2$, $Η_3$, $Μ_1$, $Μ_2$ και $Μ_3$ καθώς και τα σημεία τομής των υψών με τον κύκλο αυτόν δηλαδή τα σημεία $Κ_1$, $Κ_2$, $Κ_3$ .
Τα σημεία αυτά είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται από τις κορυφές του τριγώνου και από το Ορθόκεντρο $Η$.
Θα είναι $ΑΚ_1=Κ_1Η$ , $ΒΚ_2 = Κ_2Η$ και $ΓΚ_3 = Κ_3Η$.

Αν θεωρήσω τώρα τον περιγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου (Δηλαδή του τριγώνου που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου, τότε αυτός θα έχει διπλάσια ακτίνα από τον κύκλο των εννέα σημείων !

Ο κύκλος των εννέα σημείων είναι επίσης γνωστή ως **κύκλος του Φόιερμπαχ**



## Η συνάρτηση $f(x)=\frac{ημx}{x}$ και $f(x)=ημx$

*Για τους μαθητές της Γ Λυκείου , επιμέλεια Σαρδελή Κατερίνα*

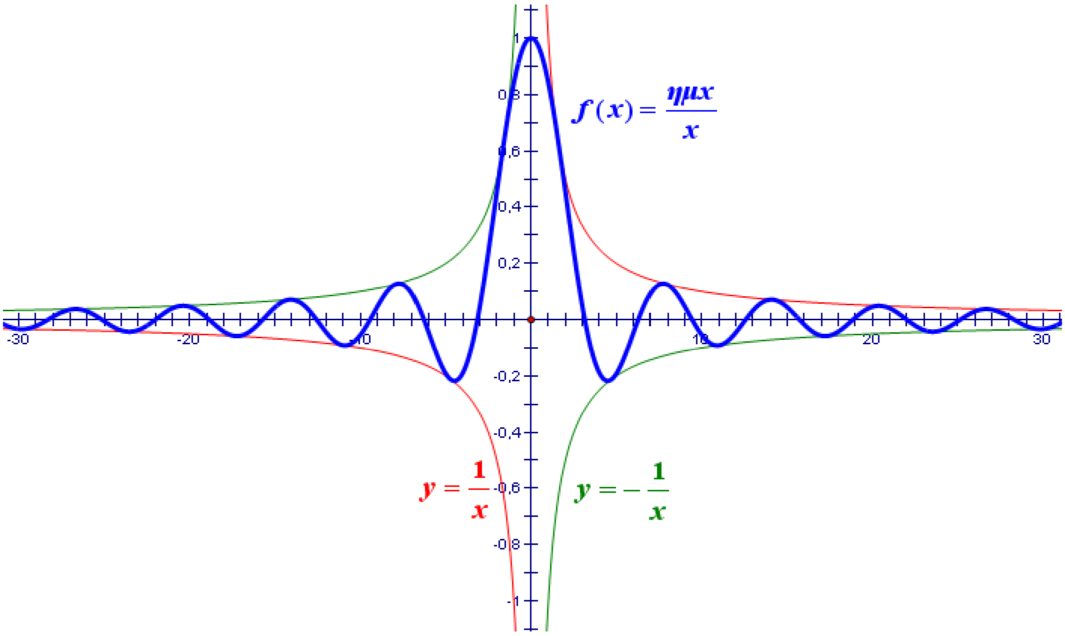
Το όριο της συνάρτησης $f(x)=\frac{ημx}{x}$ όταν $x\to+\infty$ είναι ένα κλασσικό παράδειγμα ορίου μηδενικής συνάρτησης επί φραγμένης συνάρτησης. Η απόδειξη με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής :

Ισχύει $\left|\frac{ημx}{x}\right|=\frac{|ημx|}{|x|}\leq\frac{1}{|x|}\Rightarrow -\frac{1}{|x|}\leq\frac{ημx}{x}\leq\frac{1}{|x|}$

όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{|x|}=0$ άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ημx}{x}=0$.

Πως όμως μπορούμε διαισθητικά να αντιληφθούμε αυτό το όριο; Πως είναι η γραφική παράσταση της συγκεκριμένης συνάρτησης;

Με χρήση κατάλληλου λογισμικού (πχ. **Geogebra**) η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{ημx}{x}$ είναι :




Παρατηρούμε ότι πράγματι το όριο της $f(x)=\frac{ημx}{x}$ στο $+\infty$ αλλά και στο $-\infty$ είναι $0$.

Αντίθετα το όριο της συνάρτησης $f(x)=ημx$ στο $+\infty$ και $-\infty$ δεν υπάρχει αφού από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής οι τιμές της $f$ εναλλάσσονται μεταξύ του διαστήματος $[-1, 1]$, που είναι και το σύνολο τιμών της συνάρτησης αυτής. Ας δούμε όμως και μια αλγεβρική απόδειξη του συμπεράσματος αυτού :

Έστω ότι όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \eta\mu x = \lambda \in IR$ *( αντίστοιχη απόδειξη στο - ∞ )* .

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \eta\mu(x+\pi) \underset{y\to+\infty}{\overset{y=x+\pi}{=}} \lim\limits_{y\to+\infty} \eta\mu y = \lambda$ . Επειδή $\eta\mu(x+\pi) = -\eta\mu x$ θα είναι :

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \eta\mu(x+\pi) = -\lim_{x\to+\infty} \eta\mu x = -\lambda \quad \text{άρα } \lambda = -\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = 0 \quad (1)$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} \eta\mu(x+\frac{\pi}{2}) \underset{y\to+\infty}{\overset{y=x+\pi/2}{=}} \lim\limits_{y\to+\infty} \eta\mu y \overset{(1)}{=} \lambda = 0$ . Επειδή $\eta\mu(x+\frac{\pi}{2}) = -\sigma\upsilon\nu x$ ,

$$\lim_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu x = -\lim_{x\to+\infty} \eta\mu(x+\frac{\pi}{2}) = -0 = 0 .$$

Έτσι θα είναι : $1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) = 0+0=0$ άρα $1 = 0$. **Άτοπο !**

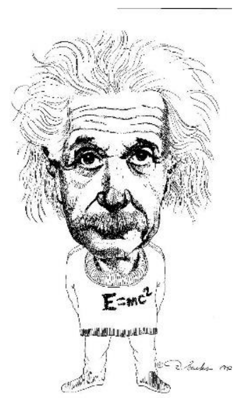
Ως επέκταση του ορίου αυτού μπορούμε να υπολογίσουμε τα όρια $\lim\limits_{x\to0} \eta\mu\frac{1}{x}$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu x$ και $\lim\limits_{x\to0} \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ .

## Προτεινόμενες ασκήσεις :

1. Αν $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$ να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \left( f(x) - \eta\mu x \right) = 0$ .
2. Δίνεται η συνάρτηση $f: IR \to IR$ για την οποία ισχύει $\eta\mu x \cdot f(x) \le \eta\mu 5x$ και $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lambda$ .

   α. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to0} \frac{\eta\mu 5x}{\eta\mu x}$ , β. να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 5$ .

*(Οι λύσεις στο επόμενο τεύχος)*




# Μαθηματικοί Γρίφοι

*Από το μαθητή Ιωάννη Σιάρκο*

**1. "Το τούβλο"**

Ένα τούβλο ζυγίζει ένα κιλό και μισό τούβλο. Πόσα κιλά ζυγίζουν τα δύο τούβλα;

**2. "Χαμένο ευρώ"**

Τρεις φίλοι μπαίνουν σε μια κάβα και αγοράζουν ένα μπουκάλι κρασί που κοστίζει *30* € δίνοντας *10 €* ο καθένας. Φεύγοντας, τους προλαβαίνει ο υπάλληλος και τους λέει πως έκανε λάθος γιατί το μπουκάλι στοιχίζει *25* και όχι *30 €* και γι' αυτό τους επιστρέφει *5€* ρέστα. Αυτοί αφού δεν μπορούν να μοιράσουν τα *5€* στα τρία, παίρνουν ο καθένας από *1€* και δίνουν *2€* φιλοδώρημα στον υπάλληλο για την καλή του πράξη. Στο τέλος όμως σκέφτονται: Έδωσε ο καθένας μας *10 €* και πήρε μία πίσω, άρα *9€*. Τρεις φορές το *9* μας κάνει *27* και *2€* για το φιλοδώρημα, *29*. Τι έγινε το ένα ευρώ;

**Απάντηση** 1:

4 κιλά. Από την αρχική πρόταση προκύπτει πως αν αφαιρέσουμε μισό τούβλο από το κάθε ζύγι, θα βρούμε πως το μισό τούβλο ζυγίζει ένα κιλό.

**Απάντηση** 2:

Στα 27 € που δώσανε και οι τρεις μαζί, συμπεριλαμβάνονται και τα 2 € του φιλοδωρήματος.

Πρέπει να αφαιρέσουμε και όχι να προσθέσουμε το φιλοδώρημα στο ποσό που πλήρωσαν για να βρούμε την αξία του κρασιού.

Πράγματι: 27 – 2 =25.