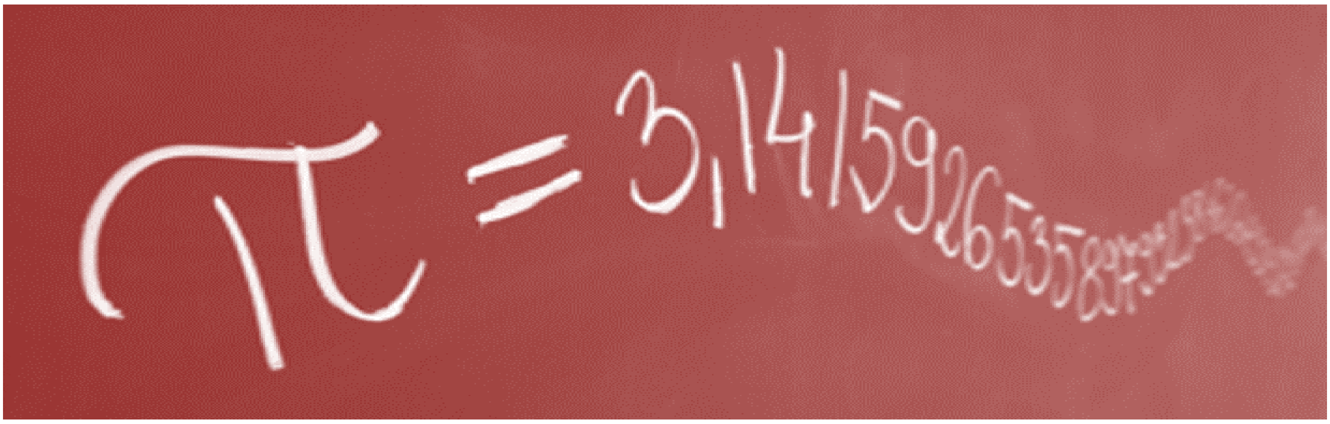
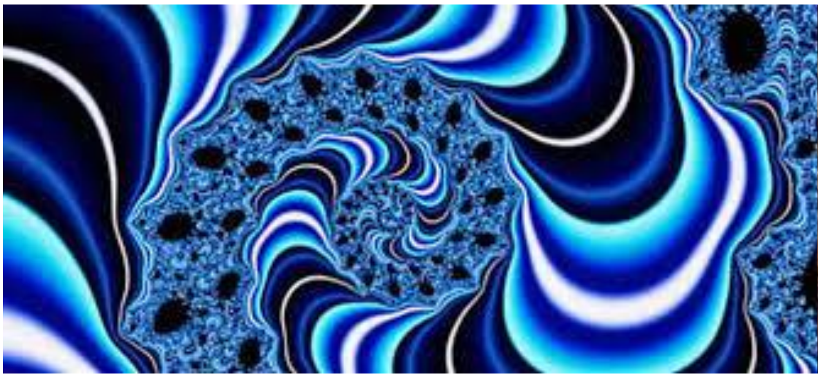


Φεβρουάριος - Μάρτιος *2017*, **Μουσικό Σχολείο Πρέβεζας** Τιμή : *1 €*

Φράκταλ και γεωμετρία του Χάους

Ο Γαλιλαίος, πατέρας της νεότερης Φυσικής, θεωρούσε τη Φύση σαν ένα γιγάντιο βιβλίο που είναι γραμμένο σε μαθηματική γλώσσα.






Πίστευε λοιπόν ότι τα στοιχεία και τα σύμβολα αυτής της τέλειας γλώσσας είναι εκτός από τους αριθμούς τα τρίγωνα, οι κύκλοι και άλλες γεωμετρικές παραστάσεις. Βέβαια, τέτοια τέλεια γεωμετρικά σχήματα τα συναντάμε σπανιότατα σε φυσικά αντικείμενα, όσο για την ακριβή περιγραφή της μορφής ενός ζωντανού οργανισμού ή ενός σύννεφου, είναι κυριολεκτικά αδιανόητη με όρους ευκλείδειας γεωμετρίας. Σήμερα όμως διαθέτουμε τα αναγκαία μαθηματικά εργαλεία για την περιγραφή αυτών των πολύπλοκων αντικειμένων. Ένα τέτοιο ισχυρότατο εργαλείο είναι η γεωμετρία των φράκταλ, που μας επιτρέπει τόσο τη στατική όσο και τη δυναμική περιγραφή πολύπλοκων φυσικών αντικειμένων όπως οι ζωντανοί οργανισμοί.

Τι ακριβώς είναι τα φράκταλ και γιατί αυτά τα γοητευτικά γεωμετρικά αντικείμενα απασχολούν τους πιο διαφορετικούς κλάδους της επιστήμης: από τη μικροφυσική μέχρι την κυτταρική βιολογία και από την αστροφυσική μέχρι την ανθρώπινη ανατομία;

Περιεχόμενα

Η εφημερίδα θα έχει σε κάθε τεύχος της, μόνιμες στήλες, όπως για παράδειγμα *Μαθηματικά και λογοτεχνία,* προτεινόμενες ασκήσεις, quiz και προβληματισμούς για τις διάφορες τάξεις του Λυκείου και του Γυμνασίου, θέματα διαγωνισμών, ιστορικά στοιχεία και άλλα θέματα που πιστεύουμε ότι θα κρατήσουν αμείωτο το ενδιαφέρον των αναγνωστών.

Ευχόμαστε να απολαύσετε όσο και εμείς αυτό το ταξίδι στο άπειρο και τελειώνοντας την ανάγνωση, να δείτε τον κόσμο γύρω σας με άλλα μάτια, μάτια που θα βλέπουν πιθανότητες και προοπτικές σε κάθε νέα μέρα που ξημερώνει...

Η συντακτική ομάδα

Η αγάπη μας για τα μαθηματικά, μια επιστήμη με ανεξάντλητες δυνατότητες και εφαρμογές,, μας έκανε να δοκιμάσουμε τις δυνάμεις μας εκδίδοντας μια εφημερίδα όπου θα προσπαθήσουμε να κολυμπήσουμε λίγο πιο βαθιά στον αχανή κόσμο των μαθηματικών.

" Το ***Π*** " είναι η δεύτερη μαθητική εφημερίδα που εκδίδει το Μουσικό Σχολείο Πρέβεζας μαζί με την εφημερίδα ***'Στη Διαπασών'***.

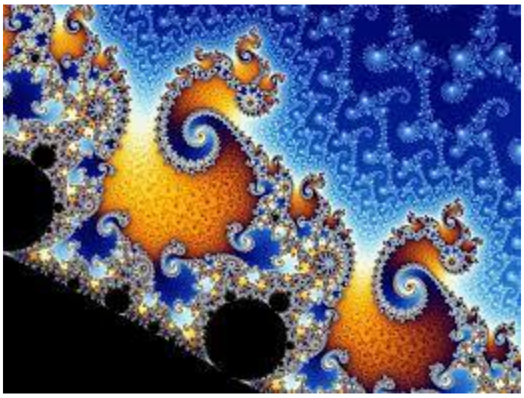
Το όνομα της εφημερίδας την εμπνευστήκαμε φυσικά από τον αριθμό *π,* ναι αυτόν τον γνωστό αριθμό *3,14*. Η εφημερίδα επιμελείται και εκδίδεται στα πλαίσια της ερευνητικής εργασίας (*Project*) με θέμα ***' Ο Κόσμος είναι Μαθηματικά '*** που υλοποιείται στο σχολείο από τους μαθητές της Β΄ Τάξης του Λυκείου, με την αρωγή των καθηγητών αλλά και άλλων μαθητών του σχολείου. Στόχος μας είναι να εκδίδεται για το τρέχον σχολικό έτος *2016-2017*, αλλά και να συνεχιστεί γιατί όχι και τα επόμενα χρόνια.

Ο αρχικός σχεδιασμός είναι να εκτυπωθούν *16* ή *20* σελίδες ποικίλου μαθηματικού ενδιαφέροντος με υλικό από το διαδίκτυο, περιοδικά και βιβλία, αλλά και με θέματα που αφορούν και άλλες θετικές επιστήμες. Αναγνώστες της εφημερίδας μπορεί να είναι μαθητές με κλίση και αγάπη για τα μαθηματικά και όχι μόνο, καθηγητές αλλά και οποιοσδήποτε μπορεί μέσα από τα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες να δει κάτι περισσότερο από σύμβολα και αριθμούς. Σίγουρα για τους αθεράπευτα ρομαντικούς του χώρου των μαθηματικών θα είναι μια ξενάγηση σε έναν υπέροχο κόσμο. Λένε πως τα μαθηματικά είναι σαν ένα σκοτεινό δωμάτιο, δεν ξέρεις τί υπάρχει μέσα, αλλά σίγουρα δεν είναι άδειο. Βασισμένοι σε αυτό, κάναμε σκοπό αυτής της εφημερίδας να σας φέρουμε λίγο πιο κοντά σε αυτή την από πολλούς παρεξηγημένη επιστήμη ως δύσκολη, ακατανόητη και ανούσια.

Η συντακτική μας ομάδα αυτή τη στιγμή απαρτίζεται από μαθητές, ενώ οποιοσδήποτε μπορεί να ασχοληθεί με την εφημερίδα και να συμμετάσχει στην έκδοσή της. Υπεύθυνος Καθηγητής *Κώτσης Μάνθος.*

Συνέχεια …

Τα φράκταλ είναι μια γενίκευση των κλασικών γεωμετρικών σχημάτων (τρίγωνα, ορθογώνια, παραλληλόγραμμα, πυραμίδες κ.τ.λ.) σε μη κανονικά και συχνά πολύπλοκα "γεωμετρικά" σχήματα, τα οποία είτε βρίσκονται στη φύση είτε κατασκευάζονται από τον άνθρωπο για διάφορες εφαρμογές ή απλώς για την ομορφιά τους. Έτσι, η φρακταλική γεωμετρία μάς επιτρέπει να περιγράφουμε ικανοποιητικά και να απεικονίζουμε πολύπλοκες φυσικές δομές όπως τα φύλλα των δέντρων, τα φτερά των πουλιών, το νεφρό του ανθρώπου, μονοκύτταρους οργανισμούς, πυρήνες κυττάρων αλλά και σύννεφα, ποτάμια, γαλαξίες. Επιπλέον, η βαθύτερη κατανόηση των πολύπλοκων γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων των φράκταλ φαίνεται να αποκαλύπτει κάποιους εγγενείς μηχανισμούς μορφογένεσης στον οργανικό και τον ανόργανο κόσμο.



Αν παρατηρήσουμε προσεχτικά ένα μικρό κομμάτι από ένα σύννεφο ή ένα μικρό τμήμα ανθρώπινου νεφρού, διαπιστώνουμε ότι η βασική γεωμετρική του δομή παραμένει η ίδια σε κάθε κλίμακα (από το πολύ μικρό μέχρι το πολύ μεγάλο). Όπως οι ρωσικές κούκλες μπαμπούσκα, τα φράκταλ διατηρούν τη βασική γεωμετρία τους σε κάθε κλίμακα. Αυτή την ιδιότητα, που οι μαθηματικοί την αποκαλούν "αυτοομοιότητα" ή μάλλον στατιστική αυτοομοιότητα, δεν τη διαθέτουν τα κλασικά γεωμετρικά σχήματα: ένα κομμάτι κύκλου ή τετραγώνου δεν είναι ποτέ το ίδιο σχήμα με όλο τον κύκλο ή με όλο το τετράγωνο.

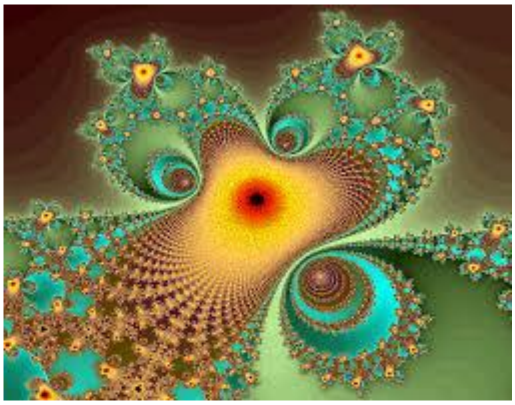
Πώς όμως αυτές οι εξελίξεις στα μαθηματικά εμπλέκονται στη διαμόρφωση της «επιστήμης του Χάους»;

Χαρακτηριστικό κάποιων "χαοτικών" φαινομένων στη φύση, τα οποία εύκολα αναγνωρίζει όλος ο κόσμος, είναι η ραγδαία αλλαγή καταστάσεως, όπως π.χ. ο σχηματισμός καταιγίδων, τα μπουρίνια, οι τυφώνες, οι οικολογικές καταστροφές και άλλες καταστροφές εν γένει. Οι επιστήμονες όμως χρειάζονται αυστηρούς ορισμούς για να χρησιμοποιήσουν την πανοπλία των Μαθηματικών για την απόδειξη αξιόπιστων ποιοτικών και ποσοτικών αποτελεσμάτων (θεωρήματα). Εκτός από κάποια μεμονωμένα παραδείγματα χάους που πρότειναν γνωστοί μαθηματικοί στο τέλος του *19ου* αιώνα και στο πρώτο ήμισυ του *20ού*, η θεωρία του Χάους θεμελιώθηκε ως επιστήμη μόνο κατά το δεύτερο ήμισυ του εικοστού αιώνα.
Εκείνη την περίοδο δόθηκαν από μαθηματικούς και φυσικούς νέα και ιδιαίτερα ενδιαφέροντα παραδείγματα χάους, τα οποία αποκάλυψαν κάποιες κοινές σε αυτά τα φαινόμενα σχέσεις, ιδιότητες και θεωρήματα.

Οι εφαρμογές και η διεπιστημονική διερεύνηση τέτοιων φαινομένων επεκτάθηκαν σε όλες τις επιστήμες, ενώ η κατασκευή ισχυρών υπολογιστών επιτάχυνε τις εξελίξεις.
Υπάρχουν σήμερα διάφοροι ορισμοί του Χάους -περισσότερο ή λιγότερο αυστηροί στη διατύπωσή τους. Περιληπτικά, ένα εξελισσόμενο εν τω χρόνω σύστημα (δυναμικό σύστημα) λέγεται χαοτικό αν (α) είναι ευαίσθητο στις αρχικές του συνθήκες, και (β) στην εξέλιξή του γίνεται ένα πλήρες «ανακάτεμα» της κατάστασης.
Παράδειγμα του (α) είναι ένα καρύδι στον βόρειο πόλο μιας μπάλας του μπάσκετ υπό την επιρροή της βαρύτητας. Μικρές αρχικές μετακινήσεις του καρυδιού γύρω από τον βόρειο πόλο της μπάλας έχουν ως αποτέλεσμα μεγάλες αλλαγές της τροχιάς του. Παράδειγμα του (β) είναι ένα υγρό στο μπλέντερ. Σημεία του υγρού που είναι κοντά απομακρύνονται. Επίσης, σημεία που είναι μακριά το ένα από το άλλο θα έλθουν κάποτε κοντά. Γίνεται μια πλήρης ανάμειξη (mixing).
Οι υπολογιστές έχουν συμβάλει σημαντικά στη σχετική έρευνα, διότι μπορούν να υπολογίζουν τα διάφορα στάδια της εξέλιξης του εν λόγω δυναμικού συστήματος. Δηλαδή, μας παρέχουν τη δυνατότητα άμεσης ψηφιακής προσομοίωσης των θεωρητικών και φυσικών καταστάσεων που μελετάμε.

Όπως αποδεικνύεται, ορισμένα φράκταλ έχουν μια εγγενή σχέση με το χάος λόγω του επαναληπτικού τρόπου κατασκευής τους (δυναμικό σύστημα). Συγκεκριμένα, το όριο αυτής της "συσσωρευμένης" επανάληψης (ονομάζεται "ελκυστής") μεταφράζεται στην ιδιότητα της αυτοομοιότητας αυτών των φράκταλ, που αν το καλοσκεφτούμε είναι ένα είδος ολικού ανακατέματος (mixing).

Πάντως, τόσο η μελέτη των φράκταλ όσο και του χάους μάς έχουν εισαγάγει σε μια νέα θεώρηση της φύσης και των μαθηματικών.



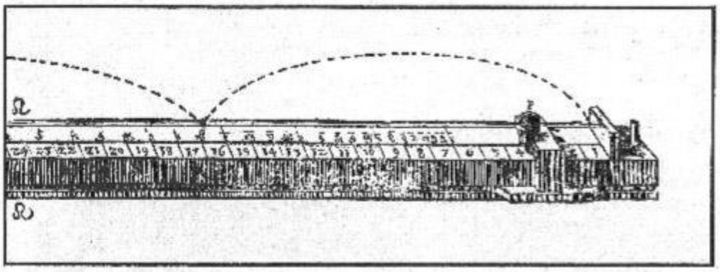
Κωνσταντίνος Φώτος & Δημήτρης Πάκος

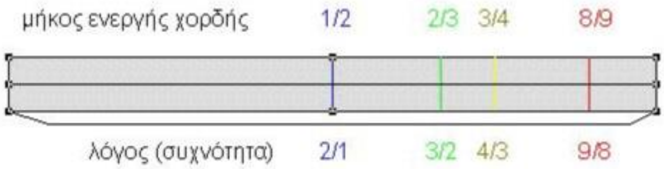
Μαθηματικά και μουσική

Η ιδέα της σύνδεσης των μαθηματικών και της μουσικής γεννήθηκε πριν από *26* ολόκληρους αιώνες στην αρχαία Ελλάδα από τον Πυθαγόρα, μαθηματικό και ιδρυτή της πυθαγόρειας σχολής σκέψης. Ο φιλόσοφος γνώριζε πολύ καλά τη σχέση της μουσικής με τους αριθμούς. Οι ειδικοί ερευνητές θεωρούν ότι το πιθανότερο είναι πως ο ίδιος και οι μαθητές του εντρύφησαν στη σχέση της μουσικής και των αριθμών μελετώντας το αρχαίο όργανο **μονόχορδο**.
Όπως φαίνεται από το όνομά του, το μονόχορδο ήταν ένα όργανο με μία χορδή και ένα κινητό καβαλάρη που διαιρούσε τη χορδή επιτρέποντας μόνο ένα τμήμα της να ταλαντώνεται. Το μονόχορδο χρησιμοποιήθηκε για τον καθορισμό των μαθηματικών σχέσεων των μουσικών ήχων. Ονομάζονταν και "Πυθαγόρειος κανών" γιατί απέδιδαν την εφεύρεσή του στον Πυθαγόρα. Πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί εργάσθηκαν για τον υπολογισμό των μουσικών διαστημάτων πάνω στον κανόνα, όπως ο Αρχύτας και ο Ερατοσθένης ο Δίδυμος.

Όμως, πώς ακριβώς πειραματίστηκαν οι Πυθαγόρειοι στο μονόχορδο, για την ανάδειξη των σχέσεων μαθηματικών και μουσικής; Ήταν εντυπωσιακό το γεγονός ότι μόνο οι ακριβείς μαθηματικές σχέσεις έδιναν αρμονικούς ήχους στο μονόχορδο. Για παράδειγμα, έπρεπε να χωρίσουν ακριβώς στη μέση τη χορδή, και όχι περίπου στη μέση, ώστε να έχουν το ευχάριστο ψυχικό συναίσθημα που απορρέει από έναν αρμονικό ήχο.
Αν μειώσουμε λοιπόν το μήκος μιας χορδής ακριβώς στο μισό, τότε ο ήχος που παράγεται είναι ακριβώς μία οκτάβα υψηλότερος (μία οκτάβα είναι ένα ντο, ρε, μι, φα, σολ, λα, σι, ντο) - μας δίνει, δηλαδή, ένα ντο πιο πάνω.

Αν μειώσουμε το μήκος της χορδής κατά *1/3*, τότε τα *2/3* της χορδής που απομένουν μας δίνουν τη διαφορά της πέμπτης (δηλαδή από το ντο στο λα). Κι αν μειώσουμε το μήκος κατά *1/4*, τότε τα *3/4* που απομένουν μας δίνουν τη διαφορά της τετάρτης (από το ντο στο σολ). Ήταν ξεκάθαρο, λοιπόν, σ' αυτό το επίπεδο της παρατήρησης ότι τα μαθηματικά "κυβερνούν" τη μουσική. Το γεγονός ότι από τους ήχους αυτών των διαφορών δημιουργείται ένα ευχάριστο συναίσθημα στον ακροατή, οδήγησε τους Πυθαγορείους στο συμπέρασμα ότι οι ακέραιοι και τα κλάσματα ελέγχουν όχι μόνο τον άψυχο αλλά και τον έμψυχο κόσμο μέσω της μουσικής





Για τους Πυθαγορείους, αυτή η άμεση και ακριβής σχέση μαθηματικών, μουσικής και ευχάριστου ψυχικού συναισθήματος αποτελούσε τη μέγιστη απόδειξη ότι η αλήθεια, στο ύψιστο επίπεδό της, εκφράζεται με μαθηματικές σχέσεις. Πίστευαν, μάλιστα, ότι η ψυχή, μέσα από τα μαθηματικά και τη μουσική, μπορούσε να εξυψωθεί ώσπου να ενωθεί με το σύμπαν και ότι ορισμένα μαθηματικά σύμβολα έχουν αποκρυφιστική σημασία. Στις αρχές της αρμονίας των Πυθαγορείων βασίστηκε η ευρωπαϊκή μουσική μέχρι, τουλάχιστον, τη στιγμή που ο Γιόχαν Σεμπάστιαν Μπαχ, μέσω της σύνθεσής του "Καλοσυγκερασμένο Κλειδοκύμβαλο" πρότεινε την υποδιαίρεση της οκτάβας σε δώδεκα ημιτόνια - κάτι, παρεμπιπτόντως, που είχε προτείνει δύο χιλιάδες χρόνια πριν από τον Μπαχ ο Αριστόξενος, όμως δεν εισακούστηκε .

Συμπερασματικά, παρά τον ηθικοθρησκευτικό χαρακτήρα της διδασκαλίας του, ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του διαμόρφωσαν φιλοσοφικές αρχές που επηρέασαν την πλατωνική και αριστοτελική διανόηση, κυρίως όμως συνέβαλαν στην ανάπτυξη των μαθηματικών, της μουσικής και της δυτικής φιλοσοφίας. Καθιέρωσαν την αντίληψη ότι η πραγματικότητα - συμπεριλαμβανομένης της μουσικής και της αστρονομίας - είναι στο βαθύτερο επίπεδό της μαθηματικής φύσης .

Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν τον αριθμό *10* τέλειο. Επειδή αυτός προκύπτει από το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων αριθμών *1+2+3+4=10*, του έδωσαν το όνομα «τετρακτύς». Κατά τον Θέωνα το Σμυρναίο υπάρχουν έντεκα τετρακτύες που η κάθε μια εκφράζει ένα τομέα της φιλοσοφικής σκέψης στην αρχαιότητα. Ενδεικτικά η *4η* τετρακτύς δηλώνει τα τέσσερα απλά στοιχεία φωτιά, αέρα, νερό και γη, η *6η* αναφέρεται στα γεωμετρικά σχήματα: με *1* εκφράζεται το σημείο, με *2* το μήκος, με *3* η επιφάνεια και με *4* το στερεό, η *8η* δίνει τα συστατικά του ζώου: τα *1,2,3* αντιστοιχούν με το λογιστικό, το θυμικό και το επιθυμητικό, δηλαδή εκφράζουν την ψυχή, ενώ το *4* το σώμα.

Η μουσική κλίμακα του Πυθαγόρα κατασκευάζεται με βάση τις αναλογίες του κύβου, ο οποίος εκφράζεται με τον αριθμό *4* της *5ης* τετρακτύος (*1* = τετράεδρο, *2* = οκτάεδρο, *3* = εικοσάεδρο, *4* = κύβος) και συμβολίζει τη γη και το συνδυασμό των στοιχείων της. Ο κύβος έχει *6* έδρες, *8* κορυφές και *12* ακμές. Οι αριθμοί *12* και *6* δίνουν την αναλογία *2/1*, οι *8* και *6* την αναλογία *4/3* ενώ οι *12* και *8* την αναλογία *3/2*. Επίσης ο αριθμός *8* είναι το αρμονικό μέσο των *6* και *12*, ενώ το αριθμητικό μέσο των αριθμών αυτών είναι ο *9*. Ο αρμονικός και αριθμητικός μέσος δίνουν την αναλογία *9/8*. Έτσι προκύπτουν οι μαθηματικές αναλογίες βάση των οποίων κατασκευάζεται η μουσική κλίμακα κατά τους Πυθαγόρειους. Οι αναλογίες αυτές αποδείχθηκαν και στην πράξη από τα πειράματα που έκανε ο Πυθαγόρας πάνω στο μονόχορδο το οποίο διαίρεσε σε *12* ίσα τμήματα (όσες και οι ακμές του κύβου).

Με τη χορδή «ανοιχτή» δηλαδή σε θέση να μπορεί να ταλαντώνεται όλο το μήκος της (λόγος *1*, συχνότητα *1*), έκρουσε και άκουσε ένα μουσικό τόνο. Στη συνέχεια περιόρισε το μέρος της χορδής που ταλαντώνεται στο μισό της μήκος, και βρήκε ότι ο ήχος που ακούστηκε είναι η διαπασών, αυτό που σήμερα ονομάζουμε οκτάβα. Το ύψος λοιπόν του ήχου επηρεάζεται από το μήκος της χορδής και μάλιστα όταν η αναλογία του μήκους είναι *1/2* (συχνότητα *2/1*) έχουμε το διάστημα της οκτάβας. Έτσι ορίστηκαν τα άκρα της μουσικής κλίμακας, η υπάτη και η νήτη. Στη συνέχεια μετακινώντας τον καβαλάρη σε διάφορα σημεία, βρήκε ότι αν ταλαντωνόταν τα *3/4* της χορδής (συχνότητα *4/3*) προέκυπτε ο τέταρτος φθόγγος από τους οκτώ μιας μουσικής κλίμακας, η μέση, ενώ αν ταλαντωνόταν τα *2/3* της χορδής (συχνότητα *3/2*) προέκυπτε ο πέμπτος φθόγγος, η παραμέση.

Οι υπόλοιποι φθόγγοι της κλίμακας κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας το λόγο *9/8* ως εξής:

- Ο δεύτερος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του πρώτου (υπάτη) αν τον πολλαπλασιάσουμε με $9/8$: $1 \times 9/8 = 9/8$ δηλαδή για την παραγωγή του θα ταλαντώνονται τα *8/9* της χορδής.

- Ο τρίτος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του δεύτερου *(9/8)* αν και πάλι πολλαπλασιαστεί με *9/8: 9/8 x 9/8 = 81/64* δηλαδή θα ταλαντώνονται τα *64/81* της χορδής.
- Ο έκτος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του πέμπτου (παραμέση) που πολλαπλασιάζεται με 9/8: *1:2/3 x 9/8 = 27/16* δηλαδή θα ταλαντώνονται τα *16/27* της χορδής.
- Τέλος, ο έβδομος φθόγγος προκύπτει από τον λόγο του έκτου και πάλι πολλαπλασιαζόμενου με *9/8: 1:16/27 x 9/8 = 243/128* δηλαδή για την παραγωγή του θα ταλαντώνονται τα *128/243* της χορδής.

Πέρα από το μονόχορδο, ο Πυθαγόρας πειραματίστηκε και με άλλα υλικά και τις ιδιότητές τους που συνθέτουν τα μουσικά διαστήματα, όπως η τάση χορδών ίσου μήκους και πάχους, το μήκος ηχητικού σωλήνα κ.τ.λ. Ο χωρισμός και καθορισμός των μουσικών διαστημάτων που πέτυχε, ήταν ένα τεράστιας σημασίας επίτευγμα τόσο για τη μουσική και τη θεωρία της όσο και για τα μαθηματικά και τη δύναμή τους να ερμηνεύουν τον κόσμο με αριθμούς όπως εξάλλου δίδασκε και ο Πυθαγόρας. Πέρα από τη μεγάλη σημασία για τη θεωρία της μουσικής, ο υπολογισμός του έδωσε την ευκαιρία να κατασκευαστούν μουσικά όργανα με μεγαλύτερη ακρίβεια από πριν. Με το πέρασμα του χρόνου, η Πυθαγόρεια μουσική κλίμακα τροποποιήθηκε είτε για πρακτικούς είτε για καθαρά φιλοσοφικούς λόγους, όμως ο Πυθαγόρας είχε δείξει έναν δρόμο που και οι σύγχρονες μουσικές κλίμακες ακολουθούν. Ακόμα και σήμερα υπολογίζουμε μαθηματικά τα μουσικά διαστήματα τα οποία βέβαια έχουν διαφοροποιηθεί σημαντικά από τότε.
Ο Αριστόξενος, νεότερος του Πυθαγόρα (περί το *375* π.Χ.) υπήρξε φιλόσοφος και σημαντικότατος θεωρητικός της μουσικής και του δόθηκε μάλιστα η ονομασία «ο Μουσικός». Η μέθοδός του ήταν κυρίως εμπειρική. Το σύστημα διδασκαλίας του βασίζεται σε αντίθεση με τον Πυθαγόρα, στην ικανότητα του αυτιού να αντιλαμβάνεται την αρμονική σχέση των μουσικών τόνων. Δεν ερευνά τις αριθμητικές σχέσεις μέσα στην οκτάβα, όμως καθορίζει τον ολόκληρο και τον μισό τόνο και κατασκευάζει μια κλίμακα με βάση το ένα δωδέκατο του τόνου.
Ο Ευκλείδης από την άλλη, έχει μια γεωμετρική πρόταση για τα μουσικά διαστήματα. Θεωρεί ότι αντιστοιχούν σε ευθείες γραμμές, με μία όμως διαφορά: ενώ οι ευθείες γραμμές που παράγονται ως αριθμοί, ορίζονται με δύο γράμματα ένα στην αρχή και ένα στο τέλος τους, τα μουσικά διαστήματα δηλώνονται με ένα γράμμα.

Στη σημερινή πραγματικότητα, τόσο η μουσική θεωρία, όσο και η μουσική πράξη, ερμηνεύονται με φυσικούς νόμους, που με τη σειρά τους διατυπώνονται με μαθηματικές σχέσεις.
Στην ακουστική (στον ιδιαίτερο κλάδο της φυσικής που έχει ως αντικείμενο τον ήχο και τις ιδιότητές του) ένα μουσικό διάστημα εκφράζεται σαν ο λόγος δύο συχνοτήτων. Σε ορισμένες περιπτώσεις ο λόγος είναι απλής μορφής όπως για παράδειγμα οι γνωστοί μας λόγοι της καθαρής πέμπτης *(3/2)*, της καθαρής τετάρτης *(4/3)*, της οκτάβας *(2/1)* κ.λ.π. Σε άλλες περιπτώσεις, ελλείψει μεγίστου κοινού διαιρέτη, οι όροι του λόγου είναι μεγάλοι αριθμοί όπως στο διάσχισμα *(2048/2025)*. Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα ότι είναι δύσκολη, αν όχι αδύνατη, η σύγκριση δύο μουσικών διαστημάτων.
Η απλούστευση στην παράσταση των μουσικών διαστημάτων επήλθε με τη βοήθεια της λογαριθμικής σχέσης
Μέγεθος μουσικού διαστήματος = $k * \log(f_2/f_1)/\log 2$
στην παραπάνω σχέση, όπου f_1, f_2 οι συχνότητες των φθόγγων του μουσικού διαστήματος και $f_2 > f_1$.
Το k είναι μια σταθερά η τιμή της οποίας καθορίζει και ένα σύστημα μονάδων μουσικών διαστημάτων.

ΠΗΓΕΣ
Ελληνική ιστοσελίδα για τη Βυζαντινή μουσική , Focus , Πανελλήνιο Σχολικό δίκτυο

Τάνια Γκρόιντα

Μικροϊστορίες των επιστημών και της φιλοσοφίας

Τον Ιανουάριο του *1913*, ο Άγγλος μαθηματικός G.H. Hardy *(1877-1947)*, τότε λέκτορας στο Trinity College του Cambridge, έλαβε ένα γράμμα από την Ινδία. Μέσα στον φάκελο βρήκε κακογραμμένα χειρόγραφα με θεωρήματα. Κάποια από αυτά δεν τα είχε ξαναδεί· κάποια άλλα ήταν γνωστά, αλλά διατυπωμένα ως πρωτότυπα. Αποδείξεις πουθενά. Η συνοδευτική επιστολή, την οποία υπόγραφε κάποιος Srinivasa Ramanujan, ζητούσε –σε φρικτά αγγλικά– τη γνώμη του γι' αυτές τις «μαθηματικές ανακαλύψεις». Ως ήδη αναγνωρισμένος μαθηματικός σε διεθνές επίπεδο, ο Hardy λάμβανε συχνά τέτοιες επιστολές, οπότε δεν έδωσε ιδιαίτερη σημασία. Ίσως και να στράβωσε λιγάκι γιατί το εξέλαβε ως φάρσα. Συνέχισε την καθημερινή του ρουτίνα, αλλά στο πίσω μέρος του μυαλού του είχε το γράμμα. Τι θεωρήματα ήταν αυτά; Απίστευτα πράγματα! Κάποια δεν μπορούσε καν να τα φανταστεί. Μήπως, τελικά, δεν ήταν φάρσα;

Όταν γύρισε στο δωμάτιό του στο Trinity, ξανάπιασε το γράμμα και αυτή τη φορά το διάβασε προσεκτικά. Ναι, δεν ήταν φάρσα! Ποιος ήταν αυτός ο τύπος; Ειδοποίησε τον J.E. Littlewood *(1885-1977)*, επίσης διαπρεπή μαθηματικό, φίλο και στενό του συνεργάτη (δημοσίευσαν από κοινού πάνω από εκατό σημαντικά άρθρα από το *1911* μέχρι το *1946* – μία από τις αποδοτικότερες συνεργασίες στην ιστορία των μαθηματικών) πως ήθελε να τον δει μετά το δείπνο. Όταν ήρθε ο Littlewood, κάθισαν μαζί και ξαναδιάβασαν τα θεωρήματα του άγνωστου Ινδού. Δεν άργησαν να συνειδητοποιήσουν ότι είχαν μπροστά τους καρπούς της σκέψης μιας ακατέργαστης ιδιοφυΐας. Ακόμα και όταν παρουσίαζε ως δικά του γνωστά θεωρήματα (από άγνοια, όχι από δόλο), το έκανε με τρόπο που έδειχνε ότι ξανακάλυπτε τα μαθηματικά μόνος του, έφτιαχνε τα εργαλεία από την αρχή. Έπειτα, υπήρχαν και τα πρωτότυπα που ήταν πέρα από κάθε φαντασία. Εντυπωσιασμένος ο Hardy, έβαλε άμεσα μπρος τις διαδικασίες να φέρει τον Ramanujan στο Cambridge με υποτροφία.

Srinivasa Ramanujan

Ο Srinivasa Ramanujan *(1887-1920)* ήταν αυτοδίδακτος στα μαθηματικά και δεν είχε καταφέρει να σπουδάσει σε πανεπιστήμιο της πατρίδας του γιατί κοβόταν στις εξετάσεις των αγγλικών. Όταν έστειλε το γράμμα στον Hardy δούλευε ως λογιστής στο Madras. Μετά από πολλές περιπέτειες, δέχτηκε την υποτροφία που του πρόσφερε το Trinity και το *1914* έφτασε στην Αγγλία. Στα σχεδόν πέντε χρόνια που έμεινε στο Cambridge δούλεψε κυρίως με τον Hardy (ο οποίος τον είχε, τρόπον τινά, υπό την προστασία του), αλλά και τον Littlewood, με εντυπωσιακά αποτελέσματα σε διάφορους τομείς των καθαρών (δηλαδή, όχι των εφαρμοσμένων) μαθηματικών: μαθηματική ανάλυση, θεωρία αριθμών, απειροστικές σειρές, συνεχή κλάσματα. Ο συνδυασμός της μαθηματικής αυστηρότητας του Hardy και της υπερφυσικής διαίσθησης του Ramanujan αποδείχτηκε ιδανικός. Πέντε εργασίες τους έχουν περάσει στην ιστορία των μαθηματικών και μνημονεύονται σήμερα περισσότερο ακόμα και από τις εργασίες των Hardy και Littlewood.

Ο Ramanujan δεν πέρασε καλά στην Αγγλία, αν εξαιρέσουμε τη μαθηματική έρευνα (γιατί, από αυτή την άποψη, πέρασε *πολύ* καλά). Το κλίμα της Αγγλίας τον τσάκισε. Νοσταλγούσε τη γυναίκα του και τους γονείς του. Έτρωγε ελάχιστα (ήταν χορτοφάγος λόγω θρησκείας και, εξαιτίας του πολέμου, τα λαχανικά ήταν δυσεύρετα).

Είχε και βεβαρυμμένη υγεία ήδη από τα νιάτα του. Να γυρίσει στην Ινδία δεν γινόταν εν μέσω του πολέμου. Από ακαδημαϊκή άποψη, τα πήγαινε πολύ καλά. Πήρε το πτυχίο του, έκανε σημαντικές δημοσιεύσεις (πάντα μαζί με τον Hardy), εκλέχτηκε Εταίρος της Royal Society και την ίδια χρονιά Εταίρος στο Trinity (ο πρώτος Ινδός στην ιστορία του κολεγίου)· αλλά η υγεία του τον πρόδωσε και δεν άργησε να καταπέσει. Η διάγνωση μιλούσε για φυματίωση και αβιταμίνωση, αλλά η σύγχρονη έρευνα κάνει λόγο για μια δύσκολα διαγνώσιμη (αλλά εύκολα θεραπεύσιμη, άπαξ και διαγνωσθεί) ηπατική ασθένεια, την αμοιβάδωση, κατάλοιπο των δυσεντεριών που τον είχαν ταλαιπωρήσει πριν από χρόνια. Νοσηλεύτηκε σε σανατόριο στο Putney. Όταν οι γιατροί τού επέτρεψαν να ταξιδέψει, γύρισε στην Ινδία, όπου λίγο αργότερα πέθανε.

Πόσο καλός ήταν, τέλος πάντων, αυτός ο Ramanujan; Ο Hardy, που τον ήξερε καλύτερα από οποιονδήποτε άλλον σε ό,τι αφορά τα μαθηματικά, τον θεωρούσε *φυσική μαθηματική ιδιοφυΐα* του επιπέδου των Gauss και Euler, αν και δεν περίμενε να συμβάλει εξίσου με αυτούς εξαιτίας των κενών στην τυπική του εκπαίδευση και του γεγονότος ότι εμφανίστηκε αργά στην κεντρική σκηνή της έρευνας. Ο δε Littlewood θεωρούσε τον Ινδό ισάξιο τουλάχιστον του Jacobi. Ο Hardy, ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς του *20*ου αιώνα, ήταν ιδιαίτερα μετριόφρων, και δεν έχανε ευκαιρία να τονίζει ότι τόσο ο Ramanujan όσο και ο Littlewood ήταν μια κλάση καλύτεροι από τον ίδιο. Γράφει στην *Απολογία* του: «Τα πραγματικά κρίσιμα σημεία στη σταδιοδρομία μου ήρθαν (…) το *1911*, όταν άρχισα τη μακρά συνεργασία μου με τον Littlewood, και το *1913*, όταν ανακάλυψα τον Ramanujan. Από τότε η πιο καλή μου δουλειά ήταν συνδεδεμένη με τη δική τους, και είναι φανερό ότι η σύνδεσή μου μαζί τους ήταν το πιο καθοριστικό γεγονός της ζωής μου. Όταν νιώθω κατάθλιψη (…) λέω στον εαυτό μου: "τουλάχιστον μπόρεσα να κάνω κάτι μοναδικό: να συνεργαστώ με τον Littlewood και τον Ramanujan σχεδόν επί ίσοις όροις"». Μεγάλες κουβέντες – που όμως δικαιώνονται εκ των αποτελεσμάτων. Ο Ramanujan ήταν γεννημένος για να κάνει μαθηματικά.

Ο Hardy, ο οποίος ποτέ δεν μιλούσε για τις λεπτομέρειες της συνεργασίας του είτε με τον Littlewood είτε με τον προστατευόμενό του, συχνά έλεγε μια ιστορία για τον Ramanujan, η οποία είναι κατά πάσα πιθανότητα αληθινή όσο κι αν μοιάζει απίστευτη (άλλωστε, ο C.P. Snow, στενός φίλος του Hardy, ισχυρίζεται ότι ο φίλος του δεν έλεγε ποτέ ψέματα). Όταν ο Ramanujan νοσηλευόταν στο Putney, ο Hardy τον επισκεπτόταν συχνά.

Έφτανε στο σανατόριο πάντα με ταξί, το μόνο μεταφορικό μέσο που χρησιμοποιούσε.

Μια μέρα, μπήκε στο δωμάτιο του Ramanujan και τον βρήκε, ως συνήθως, ξαπλωμένο και αποκαμωμένο. Ο Hardy, από ιδιοσυγκρασία, πάντα δυσκολευόταν να ξεκινήσει μια συζήτηση περί ανέμων και υδάτων. Εκείνη τη μέρα, χωρίς καν να χαιρετήσει τον ασθενή, του είπε για να σπάσει τον πάγο:
«Νομίζω ότι το ταξί που με έφερε είχε πολύ ανιαρό αριθμό: *1729*».
Ο Ramanujan ανοιγόκλεισε τα μάτια και του απάντησε:
«Όχι, Hardy, όχι! Είναι πολύ ενδιαφέρων αριθμός. Είναι ο μικρότερος αριθμός που εκφράζεται ως το άθροισμα δύο κύβων με δύο διαφορετικούς τρόπους!»
Και όντως: $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$.
[Από αυτή την ιστορία γεννήθηκαν οι *Αριθμοί των Ταξί* στη θεωρία αριθμών.
Συμβολίζονται *Ta(n)* ή *Taxicab(n)*, και ορίζονται ως εξής: ο μικρότερος αριθμός ο οποίος μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα δύο θετικών αλγεβρικών κύβων, με *n* διαφορετικούς τρόπους.
Οι τρεις πρώτοι:
Taxicab(1): $2 = 1^3 + 1^3$
Taxicab(2): $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$
Taxicab(3): $87539319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$ Και φυσικά είναι άπειροι.]

Ο Hardy δεν δήλωνε ρητά ότι ο Ramanujan έκανε αυτό τον υπολογισμό σε δευτερόλεπτα (θα μπορούσε ενδεχομένως να ήταν ένας αριθμός τον οποίο ο Ramanujan είχε ήδη εξετάσει), αλλά αυτό ήταν που άφηνε να εννοηθεί. Και ο Ramanujan ήταν αποδεδειγμένα σε θέση να κάνει τέτοια απίστευτα πράγματα με τους αριθμούς.
Δεν ξέρω τι άλλο θα πρόσφερε ο Ramanujan στα μαθηματικά αν ζούσε περισσότερο. Ενδεχομένως όχι πολλά πράγματα: άργησε να ξεκινήσει, δεν είχε λάβει τυπική εκπαίδευση και ήταν *33* χρονών. Όπως γράφει, με εύλογη πίκρα, ο σχεδόν εξηντάρης Hardy: «Ο Galois πέθανε στα *21*, ο Abel στα *27*, ο Ramanujan στα *33*, ο Riemann στα *40*. (…) Δεν γνωρίζω ούτε ένα περιστατικό μιας σημαντικής μαθηματικής προόδου που να ξεκίνησε από κάποιον άνω των *50*». Ξέρω όμως ότι μερικών ανθρώπων το μυαλό είναι για κάποιον λόγο σχεδιασμένο για ένα και μόνο (εξαιρετικό) πράγμα. (Δεν πρόκειται για μεταφυσική: εξηγείται· απλώς δεν ξέρουμε ακόμα πώς.) Σε αυτούς τους ανθρώπους εύχομαι να το βρουν σύντομα – και να του αφοσιωθούν.

Επιμελήθηκε η μαθήτρια Αδαμαντία Θεοφάνους

Πως τα μαθηματικά και η φιλοσοφία διατηρούν μια ιδιαίτερη ερωτική σχέση . Η έννοια της λογικής ενώνει τις δύο επιστήμες

Έχοντας αμέτρητα πράγματα να «χωρίσουν», οι θεωρητικές και οι θετικές επιστήμες αποτελούν ξεχωριστή επιλογή κάθε μαθητή του λυκείου που έρχεται στην δύσκολη θέση να διαλέξει μεταξύ... δύο βασικών κλάδων της επιστήμης. Το ταλέντο στα μαθηματικά, ή η έφεση στα αρχαία είναι τα κύρια χαρακτηριστικά που θα οδηγήσουν τους μαθητές στην επιλογή της κατεύθυνσης τους. Μια επιλογή που έρχεται να αποκλείσει σε τεράστιο βαθμό κάθε επαφή με την... θεωρητικά αντίθετη επιστήμη. Γιατί όμως στηρίζουμε αυτό το ξεκάθαρο διαχωρισμό μεταξύ θετικών και θεωρητικών επιστημών;

Αδιαμφισβήτητα, μαθηματικά και φιλοσοφία είναι δυο διαφορετικές επιστήμες. Ειδικότερα στην εποχή μας, όπου κάθε επιστήμη εμβαθύνει όσο το δυνατόν παραπάνω στην εξειδίκευση, όπου κάθε σχολή έχει τη τάση να διαφοροποιείται από τις διπλανές της, η βαθιά και σημαντική σχέση που διατηρούσαν οι θεωρητικές και οι θετικές επιστήμες έχει αποδυναμωθεί εμφανώς.

Προφανώς και οι ανάγκες που έχουν δημιουργηθεί στη σημερινή εποχή, ως ένα σημείο «εμποδίζουν» τη συστηματική ενασχόληση με θεματικούς κύκλους που ξεφεύγουν από το καθαρό γνωστικό αντικείμενο κάθε επιστήμονα. Η τεχνολογική ανάπτυξη σίγουρα έχει «βοηθήσει» στο διαχωρισμό κάθε επιστήμης. Η πλήρης αφοσίωση κάθε επιστήμονα στα... γνωστά μονοπάτια του αντικειμένου του όμως ήδη εμφανίσει αρνητικά στοιχεία.

Όταν ο Πλάτωνας δημιουργούσε τη φημισμένη σχολή του το 387 π.Χ, φρόντισε με μια επιγραφή σε κεντρικό κτίριο να περάσει ένα σημαντικότατο μήνυμα. Το ρητό «Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω μου την στέγην» εξηγούσε ακριβώς τη στάση που κρατούσε ο αρχαίος φιλόσοφος απέναντι στα μαθηματικά, την επιστήμη που πλέον κανένας θεωρητικός επιστήμονας δεν... παίρνει στα σοβαρά.

Σε όλες τις εποχές της κουλτούρας και της μάθησης υπήρξαν φιλόσοφοι-μαθηματικοί και μαθηματικοί – φιλόσοφοι. Ο γνωστός μαθηματικός Μπερνάντ Μπολζάνο, το 19ο αιώνα είχε δηλώσει πως: «Ένας αδύνατος μαθηματικός δεν θα γίνει ποτέ δυνατός φιλόσοφος.» Η σχέση που συνδέει μαθηματικά και φιλοσοφία, αλλά και γενικότερα θεωρητικές και θετικές επιστήμες, είναι τόσο δυνατή που δεν μπορεί να περνά ανυπολόγιστη από όσους επιστήμονες θέλουν να διακριθούν.

Ο βασικός συνδετικός κρίκος μεταξύ των δυο επιστήμων είναι η έννοια της λογικής, Όποιος έχει εμβαθύνει έστω και λίγο σε κάποια θεωρητική ή θετική επιστήμη, γνωρίζει τη βασική τους λογική. Είτε μαθηματικά είτε φιλοσοφία όμως, ο τρόπος σκέψης είναι κατά βάση ίδιος. Η λογική της απόδειξης, της πλήρους τεκμηρίωσης κάθε δεδομένου που προκύπτει, είναι κοινή και για τις δύο επιστήμες. Τα λογικά βήματα που ακολουθούνται, είναι σε μεγάλο βαθμό κοινά.

Φιλοσοφία και μαθηματικά είναι δυο επιστήμες που αναπτύσσονται ταυτόχρονα. Το εντυπωσιακό χαρακτηριστικό τους όμως είναι πως και όσο διαφορετικά και να δείχνουν, αλληλοστηρίζονται ώστε να αναπτυχθούν. Το πρακτικό στοιχείο των μαθηματικών βοηθά την εξέλιξη της φιλοσοφίας και αντίστοιχα το θεωρητικό κομμάτι της φιλοσοφίας αποτελεί πηγή έμπνευσης νεοφώτιστων μαθηματικών.

Έχοντας κοινή λογική, εφαρμόζοντας τους ίδιους νοηματικούς κανόνες, οι δύο επιστήμες συμπλέουν αρμονικά.

Άλλωστε, κάθε μαθηματική ανακάλυψη αποτελεί αντικείμενο φιλοσοφικών αναζητήσεων. Κάθε μαθηματικό μοντέλο χρειάζεται τη συμβολή της φιλοσοφίας ώστε να αναδειχθεί και να μετατραπεί σε πρακτική εφαρμογή μέσα στη κοινωνία. Με την ίδια λογική, κάθε φιλοσοφική ρήση αποτελεί πηγή ιδεών για τους θετικούς επιστήμονες, δίνοντας τους την ευκαιρία να ανακαλύψουν νέες πτυχές του αντικειμένου τους,

Λαμβάνοντας υπόψιν τα σημαντικά κοινά χαρακτηριστικά δύο τόσο... διαφορετικών επιστημών, είναι απορίας άξιο πως μαθηματικά και φιλοσοφία έχουν καταλήξει να είναι δυο εκ διαμέτρου αντίθετα γνωστικά αντικείμενα. Με βάση την... ερωτική σχέση που διατηρούν εδώ και τόσους αιώνες, θα έπρεπε κάθε φιλόσοφος και κάθε μαθηματικός να «αγαπούν» εξίσου και τις δύο επιστήμες. Ίσως αυτό αποτελέσει μια λύση στη μονοδιάστατη λογική που τείνει να αφομοιώσει η σημερινή κοινωνία.

Δημήτρης Πάκος, Πατσιάς Αναστάσιος

Μαθήματα Ευρετικής ...για αρχάριους!!!

Επιμελήθηκαν οι μαθήτριες Καζαντζίδη Μαρία, Βάσω Κατωγιάννη & Νέσσερη Ελευθερία

Τζωρτζ Πόλυα γεννήθηκε στην Ουγγαρία το *1887* και μετανάστευσε στη Αμερική κατά την διάρκεια του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου. Δεν επέστρεψε ποτέ στην Ουγγαρία, θήτευσε ως καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Στάνφορντ όπου παρήγαγε μαθηματικά μέχρι το τέλος της ζωής του. Έφυγε από την ζωή πλήρης ημερών σε ηλικία *97* ετών στο Palo Alto της Καλιφόρνια.

-"Τώρα αυτό πως λύνεται;"

Η πιο συνηθισμένη ερώτηση μαθητή σε σχολική τάξη. Όλοι οι καθηγητές μαθηματικών μπορούν να σας βεβαιώσουν την αμηχανία των μαθητών όταν τους τεθεί ένα μαθηματικό πρόβλημα .Η πλειοψηφία των μαθητών αδυνατεί όχι μόνο να τα λύσει αλλά ακόμα και να κατανοήσει ποια είναι τα δεδομένα και τα ζητούμενα. Η κύρια αίτια για την αδυναμία τους αυτή είναι ο πάγιος μύθος ότι η μαθηματική ικανότητα και αντίληψη δεν μαθαίνεται . Μύθο στον οποίο βρίσκουν καταφύγιο πολλοί μαθητές επικαλούμενοι ότι «δεν παίρνουν τα μαθηματικά» η όπως χαρακτηριστικά ανέφερε μια μαθήτρια πρόσφατα στον δημοφιλή ιστότοπο facebook « απλά δεν το 'χω» .Τίποτα δεν βρίσκεται μακρύτερα από την αλήθεια. Η μαθηματική αντίληψη είναι μια δεξιότητα η οποία μπορεί να καλλιεργηθεί ,η δυσκολία έγκειται στο γεγονός ότι απαιτείται πείσμα , επιμονή και κυρίως σωστή καθοδήγηση από πλευράς εκπαιδευτικού. Όπως τονίζει με έμφαση ο μαθηματικός Ιαν Στιούαρτ «Ένας καλός δάσκαλος αξίζει το βάρος του σε χρυσάφι». Στόχος λοιπόν του παρόντος είναι η μύηση στις βασικές αρχές της ευρετικής (problem solving) της διαδικασίας εκείνης την οποία εφαρμόζουμε είτε συνειδητά είτε ασυνείδητα προκειμένου να λύσουμε ένα μαθηματικό πρόβλημα .

Το *1945* ο Ούγγρος μαθηματικός Τζώρτζ Πόλυα έγραψε ένα μικρό βιβλίο με τίτλο «πώς να το λύσω». Έκτοτε αυτό το μικρό βιβλίο έγινε ένα από τα πιο πολυδιαβασμένα βιβλία μαθηματικών και όχι άδικα. Πρόκειται για ένα πρακτικό οδηγό επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων με έμφαση στις στρατηγικές επίλυσης εμπλουτισμένο με λυμένα παραδείγματα .

Ο Πόλυα παραθέτει πολύ εύληπτα και παραστατικά μια διαδικασία τεσσάρων φάσεων η οποία οργανώνει την διαδικασία επίλυσης. Δεν πρόκειται για συγκριμένα βήματα που εφαρμόζονται σε κάθε πρόβλημα αλλά για ένα γενικό σύνολο οδηγιών. Ένα γενικό πλάνο, φανταστείτε ένα σπίτι τεσσάρων δωματίων η διαδικασία του Πόλυα υποδεικνύει την σειρά με την οποία θα επισκεφτείτε τα δωμάτια αλλά όχι τι ακριβώς θα κάνετε στα δωμάτια.

Ας δούμε τα τέσσερα βήματα που προτείνει:

1.Κατανοηση του προβλήματος

Το πρώτο βήμα είναι να καθορίσεις που πηγαίνεις. Πρέπει να βεβαιωθείς τι ζητά το πρόβλημα.

● Διάβασε το πρόβλημα προσεκτικά. Αν σε βοηθάει περισσότερο διάβασε το δυνατά !!!!

● Κατέγραψε τις ποσότητες και τις συνθήκες που σου δίνονται (δεδομένα του προβλήματος)

● Αναγνώρισε τις άγνωστες ποσότητες. Τι ακριβώς πρέπει να βρεις .

● Ένα σχήμα θα σε βοηθήσει να οργανώσεις όλες τις πληροφορίες και να οπτικοποιήσεις το πρόβλημα.

● Αν είναι εύκολο, διατύπωσε το πρόβλημα με δικά σου λόγια για να είσαι σίγουρος ότι το κατανόησες.

2.Καταστρωσε μια στρατηγική για την επίλυση του προβλήματος

Άπαξ και κατανοήσεις το πρόβλημα πρέπει να αποφασίσεις πως θα το λύσεις. Αυτό είναι το δυσκολότερο βήμα, απαιτεί φαντασία, δημιουργικότητα και εμπειρία.

● Προσπάθησε να σκεφτείς ένα ανάλογο η παρόμοιο πρόβλημα.

● Σχεδίασε την στρατηγική επίλυσης με ένα διάγραμμα ροής .

● Προσπάθησε να διασαφηνίσεις τις αναλυτικές η υπολογιστικές τεχνικές που θα χρησιμοποιήσεις.

3.Εκτελεσε την στρατηγική του δευτέρου βήματος

Εφόσον αποφάσισες να χρησιμοποιήσεις μια συγκεκριμένη στρατηγική πρέπει πρώτα να την εκτελέσεις.

● εκτέλεσε με προσοχή κάθε βήμα και διπλοτσέκαρέ το, για να αποφύγεις λάθη.

● αν κατά την εκτέλεση κολλήσεις πρέπει να γυρίσεις στο δεύτερο βήμα.

4.Ελεγχος της λύσης

Το ξέρω ότι είναι πειρασμός να σταματήσεις στο βήμα *3* αλλά το τελευταίο βήμα είναι το πιο κρίσιμο.

● Έλεγξε ότι το αποτέλεσμα έχει νόημα. Αν για παράδειγμα σε ένα πρόβλημα το αποτέλεσμα είναι πλήθος ημερών δεν μπορεί να είναι δεκαδικός ή αρνητικός αριθμός .

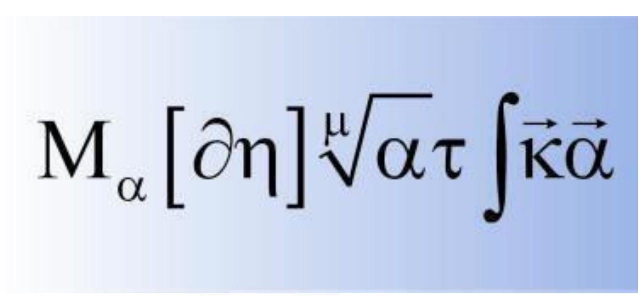
● Ξαναδές όλα τα υπολογιστικά βήματα ή αν είναι δυνατόν έλεγξε με έναν ανεξάρτητο τρόπο τα αποτελέσματα.

● Γράψε την λύση αναλυτικά και με σαφήνεια.

Η διαδικασία του Πόλυα συνοψίζεται :

Κατανόηση , σχεδιασμός , εκτέλεση, έλεγχος.

Καθένα από τα βήματα είναι σημαντικό και πρέπει να εφαρμόζεται.



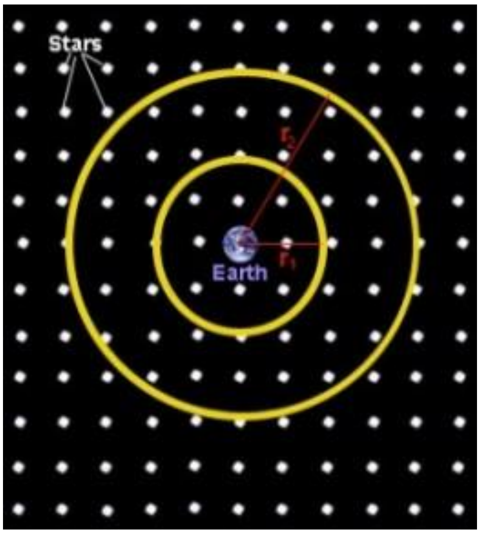
Γιατί υπάρχει η νύχτα;

Του Διονύση Π. Σιμόπουλου – επίτιμου διευθυντή του Ευγενιδείου Πλανηταρίου, επιμελήθηκαν οι μαθήτριες Τέφα Ελένη & Παβέλη Έλενα

Πριν από μερικές ημέρες, εκμεταλλευόμενος τις ήπιες και καθάριες νύχτες αυτής της εποχής, θέλησα να δείξω στη μεγάλη μου εγγονή ορισμένους εύκολα αναγνωρίσιμους αστερισμούς του Βορρά. Κι εκεί που όλα πήγαιναν μια χαρά, μου «πετάει» μια πραγματική «καραμπόλα»! «Δεν μου λες, παππού», μου είπε, **«γιατί τη νύχτα ο ουρανός είναι σκοτεινός;».** Θα μπορούσατε φυσικά να υποθέσετε, όπως έκανε και η εγγονή μου, ότι το σκοτάδι της νύχτας οφείλεται στην απουσία του Ηλίου από τον νυχτερινό ουρανό, η απάντηση όμως αυτή δεν είναι καθόλου ικανοποιητική. Γιατί, παρ' όλη την απουσία του Ηλίου από τον νυχτερινό ουρανό, η ύπαρξη ενός «άπειρου» αριθμού άστρων στο σύμπαν θα 'πρεπε να κάνει τον ουρανό «άπειρα» λαμπερό, τόσο την ημέρα όσο και τη νύχτα. Το απλό, αλλά κάθε άλλο παρά απλοϊκό, αυτό ερώτημα για το σκοτάδι της νύχτας καταγράφηκε επίσημα το *1823* στη γερμανική «Αστρονομική Επετηρίδα» από τον γιατρό και αστρονόμο Χάινριχ Βίλχελμ Ολμπερς. Από τότε η παράδοξη αυτή διαπίστωση έμεινε γνωστή ως «το παράδοξο του Ολμπερς».

Ο Ολμπερς έκανε την εξής σκέψη: αν το σύμπαν διέθετε όντως έναν άπειρο αριθμό άστρων, τότε και την ημέρα και τη νύχτα οπουδήποτε και αν κοιτάζαμε, θα έπρεπε να βλέπαμε την επιφάνεια κάποιου άστρου. Οπότε ο ουρανός θα έπρεπε να ήταν καλυμμένος από τρισεκατομμύρια αστρικές επιφάνειες που θα κάλυπταν η μία την άλλη και γι' αυτό ο ουρανός θα έπρεπε να ήταν (με μετέπειτα υπολογισμούς) *150.000* φορές λαμπρότερος από την επιφάνεια του Ηλίου και την ημέρα και τη νύχτα.

Για να γίνει πιο κατανοητό το όλο σκεπτικό του παράδοξου αυτού, φανταστείτε ότι τ' άστρα είναι τοποθετημένα μέσα σε ομόκεντρες σφαίρες που έχουν κέντρο τη Γη. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι κάθε σφαίρα απέχει από την προηγούμενη *10* έτη φωτός. Ο χώρος που καθορίζεται μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης σφαίρας περιέχει άστρα από *10* έως *20* έτη φωτός από τη Γη κ.ο.κ. Τα άστρα της δεύτερης σφαίρας είναι μεν αμυδρότερα από τα άστρα της πρώτης σφαίρας, λόγω της μεγαλύτερης απόστασής τους από τη Γη, είναι όμως περισσότερα επειδή η δεύτερη σφαίρα περιλαμβάνει περισσότερο όγκο από την πρώτη.



Με απλούς υπολογισμούς γνωρίζουμε ότι η κάθε σφαίρα θα περιέχει τέσσερις φορές περισσότερα άστρα από την προηγούμενη, αλλά κατά μέσον όρο θα φαίνονται τέσσερις φορές λιγότερο λαμπερά από τα άστρα της προηγούμενης σφαίρας. Γι' αυτό οι δύο αυτοί παράγοντες αλληλοαναιρούνται κι έτσι κάθε μία σφαίρα θα εκπέμπει την ίδια ποσότητα φωτός. Οπότε αν είχαμε έναν άπειρο αριθμό τέτοιων σφαιρών θα έπρεπε να είχαμε έναν άπειρα λαμπερό ουρανό, μέρα και νύχτα. Όπως, όμως, είναι εμφανές κάθε βράδυ, δεν βλέπουμε κάτι τέτοιο όταν κοιτάζουμε τον νυχτερινό ουρανό, και το «παράδοξο του Ολμπερς» θα ευσταθούσε ακόμη κι αν στις πιο απόμακρες σφαίρες θα είχαμε την ύπαρξη γαλαξιών αντί των άστρων. Αν δηλαδή είχαμε την ύπαρξη ενός «άπειρου» αριθμού γαλαξιών στο σύμπαν, πάλι θα έπρεπε να είχαμε έναν «άπειρα» λαμπερό ουρανό.

Ίσως πάλι να θεωρείτε ότι η ύπαρξη τεράστιων νεφελωμάτων αερίων και διαστημικής «σκόνης» στο διαστρικό Διάστημα να εμποδίζουν το φως των άστρων και των γαλαξιών να φτάσει στη Γη. Τα νεφελώματα όμως αυτά στον συνεχή βομβαρδισμό φωτός από τα άστρα θα συμπεριφέρονταν όπως συμπεριφέρεται στη βροχή ένα άδειο δοχείο. Το δοχείο σύντομα θα γέμιζε και το νερό θα ξεχείλιζε με τον ίδιο ρυθμό που θα έπεφτε πάνω του η βροχή. Με άλλα λόγια, τα νεφελώματα θα απορροφούσαν για ένα Διάστημα το φως, σιγά σιγά όμως θα υπερθερμαίνονταν, θα «ξεχείλιζαν» και θα άρχιζαν να το ακτινοβολούν ακριβώς όπως πριν με το ίδιο αποτέλεσμα: έναν άπειρα λαμπερό ουρανό.

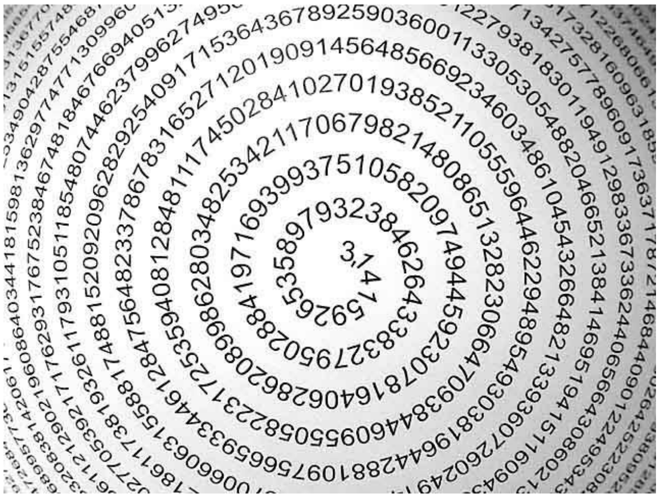
Τη δεκαετία του *1920*, όμως, ο Εντουιν Χαμπλ ανακάλυψε ότι το σύμπαν διαστέλλεται και ότι όλοι οι γαλαξίες απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο συνεχώς, κι όσο πιο μακριά είναι ένας γαλαξίας τόσο πιο γρήγορα φαίνεται να απομακρύνεται. Το γεγονός αυτό μας υποδεικνύει και την αρχή της λύσης του παράδοξου. Γιατί η ένταση του φωτός ενός απόμακρου γαλαξία ελαττώνεται, λόγω του φαινομένου Ντόπλερ, τόσο περισσότερο όσο μακρύτερα βρίσκεται ο γαλαξίας αυτός. Έχουμε δηλαδή μια μετατόπιση της ακτινοβολίας προς το ερυθρό τμήμα του φάσματος, οπότε το περισσότερο φως, η περισσότερη ακτινοβολία, που παίρνουμε από τους μακρινούς γαλαξίες είναι σε μήκη κύματος που το κάνουν στα μάτια μας «αόρατο». Άρα από τους μακρινούς γαλαξίες δεχόμαστε μικρή ποσότητα ενέργειας και κατά συνέπεια οι ποσότητες φωτός που περιέχει κάθε μία από τις φανταστικές σφαίρες του Όλμπερς δεν είναι τελικά ίσες μεταξύ τους. Ο λόγος δηλαδή που ο ουρανός δεν είναι άπειρα λαμπερός τη νύχτα βασίζεται στο γεγονός ότι το σύμπαν, ακόμη κι αν ήταν άπειρο χωροταξικά, δεν έχει ούτε άπειρη ηλικία ούτε είναι στατικό, αλλά αντίθετα έχει πεπερασμένη ηλικία και, επιπλέον, διαστέλλεται.

Λιγάκι από π

Μερικοί υπολογισμοί του αριθμού *π*, *του μαθητή Βερυκίου Απόστολου*

Δεν είναι λίγοι επιστήμονες του χώρου των μαθηματικών που ασχολήθηκαν με τον υπολογισμό του αριθμού *π*.
Το *200ο* ψηφίο του *π* υπολογίζεται ότι βρέθηκε το *1844*. Το *1872*, ο Ουίλιαμ Ράδερφορντ φτάνει τα *440,* όντας βέβαιος ότι θα αργήσουν να τον ξεπεράσουν. Παρόλα αυτά όμως, το *1874*, δύο χρόνια αργότερα, ο Ουίλιαμ Σανκς δημοσιεύει *704* ψηφία, τα οποία υπολόγιζε για *20* χρόνια ! Το ρεκόρ αυτό έσπασε το *1947* από κάποιον Φέργκιουσον, ο οποίος ανακάλυψε ότι το *528ο* ψηφίο του Σανκς ήταν λανθασμένο (άρα και τα επόμενα). Το *1949* ξεπερνιούνται τα *1000* ψηφία. Από εκεί και μετά, περισσότερα ψηφία βρέθηκαν από τους υπολογιστές. Το *1958* φτάνουν τα *10.000* ψηφία, το *1961* τα *100.000*, το *1973* το εκατομμύριο, το *1983* τα *10* εκατομμύρια, το *1987* τα *100* εκατομμύρια, το *1989* το δισεκατομμύριο.

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \ldots$$ (Φρανσουά Βιέτ)



$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots}$$ (Τζων Ουάλις)

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{\ldots}}}}$$ (Ουίλιαμ Μπράουνκερ)

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \ldots$$ (Γκότφριντ Λάιμπνιτς)

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ (Λέοναρντ Όιλερ)

Άραγε, πόσα ψηφία του *π* χρησιμοποιεί η NASA στους υπολογισμούς της; Το ερώτημα αυτό τέθηκε στον Marc Rayman, τον επικεφαλή μηχανικό της αποστολής Dawn.
Σύμφωνα με τον Marc Rayman η NASA για την διαπλανητική πλοήγηση των διαστημοπλοίων της χρησιμοποιεί τα 15 πρώτα δεκαδικά ψηφία του *π*: ***3.141592653589793***
Πόσο ακριβείς είναι οι υπολογισμοί με αυτή την προσέγγιση; Η απάντηση δίνεται με *3* χαρακτηριστικά παραδείγματα:

1. Το πιο απομακρυσμένο από τη Γη διαστημικό σκάφος είναι το Voyager *1*. Βρίσκεται *20* τρισεκατομμύρια χιλιόμετρα μακριά. Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο που έχει ως ακτίνα αυτή την απόσταση ή διάμετρο *40* τρισεκατομμύρια χιλιόμετρα. Ποιο είναι το μήκος της περιφέρειας αυτού του κύκλου; Πολλαπλασιάζοντας την διάμετρο του κύκλου επί τον αριθμό *π* στρογγυλοποιημένο στο *15ο* ψηφίο, όπως γράφεται πιο πάνω, η τιμή της διαμέτρου που θα προκύψει θα έχει απόκλιση από την τιμή που θα προέκυπτε αν μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε με την ακριβή τιμή του π θα ήταν *4* εκατοστά! Με λίγα λόγια το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου με διάμετρο *40* τρισεκατομμύρια χιλιόμετρα θα ήταν λάθος κατά *4* εκατοστά, όσο το μήκος του μικρού δακτύλου σας.

2. Η διάμετρος της Γης είναι *12.750* χιλιόμετρα. Το σφάλμα που προκύπτει όταν υπολογίζουμε το μήκος της περιφέρειας του κύκλου με αυτή τη διάμετρο χρησιμοποιώντας μόνο τα *15* πρώτα δεκαδικά ψηφία του *π*, ισούται περίπου με τη διάμετρο ενός μικρού μορίου!

3. Κι ένα τερατώδες παράδειγμα: αν θεωρήσουμε ότι η ακτίνα ενός Ευκλείδειου σύμπαντος είναι *46* δισεκατομμύρια έτη φωτός, τότε πόσα ψηφία του *π* πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε την περιφέρεια του κύκλου με ακτίνα *46* δισεκατομμύρια έτη φωτός με σφάλμα όσο η διάμετρος του ατόμου του υδρογόνου; Η απάντηση είναι ότι χρειάζονται μόνο *39* ή *40* δεκαδικά ψηφία του *π* !

Η φημισμένη παράσταση ενός επιστήμονα που έμεινε στην ιστορία

Το πείραμα του Γκέρικε

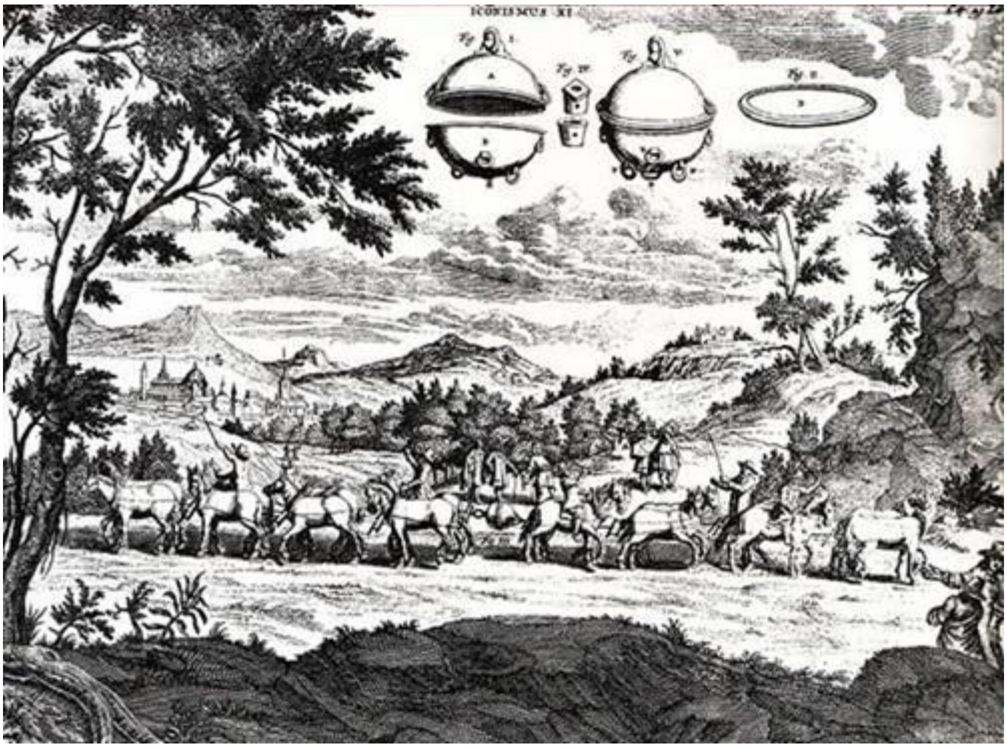
Η ύπαρξη της ατμοσφαιρικής πίεσης επρόκειτο να καταδειχθεί κατά εντυπωσιακό τρόπο από το Γερμανό μηχανικό και εφευρέτη Ότο φον Γκέρικε, ο οποίος εγκαταστάθηκε στο Μαγδεμβούργο με τη νεαρή γυναίκα του και την οικογένειά του το *1627*. Τέσσερα χρόνια αργότερα θα έφευγε κυνηγημένος, λόγω της κατάληψης και της ισοπέδωσης της προτεσταντικής αυτής πόλης, εν μέσω σκηνών βαρβαρότητας και μακελειού, από το στρατό του Αυτοκράτορα της Αγίας Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας. Με το τέλος του Τριακονταετούς Πολέμου, ο Γκέρικε επέστρεψε και χρησιμοποίησε τις ικανότητές του ως μηχανικός για την ανοικοδόμηση του Μαγδεμβούργου, του οποίου αργότερα υπήρξε δήμαρχος για πάνω από ένα τέταρτο του αιώνα.

Ο Γκέρικε ήταν ο πρώτος από μια νέα γενιά επιστημόνων: ήταν ένας επιστήμονας-σόουμαν. Διέθετε τη βαθιά ενορατική ικανότητα και τη μεγαλοφυΐα ενός ικανότατου πειραματιστή, μαζί με ένα έμφυτο ταλέντο για τη χαρισματική παρουσίαση, που θα το ζήλευε και ένας διευθυντής τσίρκου. Εντούτοις, οι «παραστάσεις» του Γκέρικε ήταν άκρως διαφωτιστικές σε σχέση με σοβαρά επιστημονικά ζητήματα. Είναι, ίσως, κατανοήσιμο το γιατί σε μια Γερμανία, που είχε καταντήσει μια έρημη χώρα, το μείζον φιλοσοφικό ζήτημα της εποχής ήταν η φύση του κενού.

Ήταν, όμως, δυνατόν να υπάρχει τέτοιο πράγμα;

Κατά τον Αριστοτέλη ήταν αδύνατον, ο δε Αριστοτέλης αντιπροσώπευε την «αυθεντία» των προγενέστερων φιλοσόφων, στους οποίους οφείλουμε τη ρήση «Η Φύση απεχθάνεται το κενό». Ο Γκέρικε αποφάσισε να αντιμετωπίσει το ζήτημα πειραματικά. Το *1650* εφηύρε μιαν αεραντλία, που την αποτελούσε ένας κύλινδρος με βαλβίδες αντεπιστροφής. Αυτή αντλούσε τον αέρα από ένα δοχείο κατά τρόπο αντίθετο προς εκείνον τον οποίο χρησιμοποιεί μια σύγχρονη αντλία ποδηλάτου για να φουσκώσει τη σαμπρέλα. Ως κινητήρια δύναμη για την αντλία χρησιμοποιείτο ο ντόπιος σιδεράς (με τη συνδρομή των βοηθών του στη συνέχεια, όταν τα πράγματα άρχισαν να ζορίζουν). Ο Γκέρικε χρησιμοποίησε την καινούρια αντλία για να αφαιρέσει τον αέρα από ένα μεταλλικό δοχείο. Η απλή βλασφημία μετατράπηκε σε ύβρη, όταν κατέφυγε — άκουσον-άκουσον! – σε αριστοτελικό επιχείρημα για να αποδείξει πως το δοχείο περιείχε κενό. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, αν υπήρχε το κενό, δε θα μεταδιδόταν μέσα από αυτό ο ήχος. Ο Γκέρικε έβαλε ένα κουδούνι μέσα στο δοχείο και όλοι διαπίστωσαν πως ο ήχος του δεν ακουγόταν.

Στη συνέχεια κατέδειξε πως στο κενό η φλόγα ενός κεριού σβήνει, και επίσης ότι ένας σκύλος κλεισμένος σε περιβάλλον όπου επικρατεί κενό αέρος πεθαίνει. (Αν και θα περνούσαν κάποια χρόνια μέχρις ότου γίνει από όλους κατανοητό εντελώς το τι είχε γίνει με αποτέλεσμα ο… Αζόρ να καταλήξει μάρτυρας στο βωμό της επιστήμης.)



Η πιο φημισμένη παράσταση του Γκέρικε έλαβε χώρα στις *8* Μαΐου του *1654*, ενώπιον του Αυτοκράτορα Φερδινάνδου Γ', προσελκύοντας πλήθη λαού από ολόκληρη τη Σαξονία. Αυτή τη φορά στο πείραμα έπαιρναν μέρος δυο τεράστια ημισφαίρια από χαλκό, η χύτευση των οποίων είχε γίνει με μεγάλη ακρίβεια έτσι ώστε τα περιστόμιά τους να εφαρμόζουν σφιχτά. (Πέρασαν στην ιστορία ως τα ημισφαίρια του Μαγδεμβούργου.) Ο αυτοκράτορας είχε θρονιαστεί για τα καλά πάνω στην εξέδρα του, δεσπόζοντας πάνω από τα πλήθη που είχαν συρρεύσει στην ηλιόλουστη πλατεία μπροστά από το κτίριο του κοινοβουλίου. Παρακολουθούσαν όλοι με αδημονία τον Γκέρικε, που λίπαινε προσεχτικά τα περιστόμια των ημισφαιρίων, πριν τα φέρει να εφαρμόσουν προσεκτικά το ένα με το άλλο.

Στη συνέχεια, ο σιδεράς άρχισε να αντλεί με δύναμη τον αέρα που ήταν στο εσωτερικό της ερμητικά κλεισμένης χάλκινης σφαίρας. Μετά από λίγο, ένωσαν μαζί του τις προσπάθειές τους και οι βοηθοί του, καθώς η άντληση γινόταν σταδιακά όλο και πιο επίμοχθη. Μετά, το πλήθος άρχισε να παρατηρεί σαστισμένο, καθώς μια ομάδα από οχτώ άλογα ζεμένα μαζί οδηγήθηκαν στην πλατεία και προσδέθηκαν στο ένα ημισφαίριο. Και μετά έγινε το ίδιο με το άλλο ημισφαίριο και άλλη μια ομάδα οχτώ αλόγων. Μόλις έδωσε το σύνθημα ο Γκέρικε, οι δυο ομάδες των αλόγων όρμησαν προς αντίθετες κατευθύνσεις σε μια προσπάθεια να αποχωρίσουν τα ημισφαίρια.

Το πλήθος παρακολουθούσε έχοντας βουβαθεί, καθώς τα δυνατά άλογα έλξης τραβούσαν γογγύζοντας- παρά τα καμτσίκια, όμως, που ανεβοκατέβαιναν στις ράχες τους, δεν τα κατάφερναν να αποχωρίσουν τα ημισφαίρια.

Ο Γκέρικε απευθύνθηκε στον αυτοκράτορα και στο πλήθος. Τους είπε πως δεν επρόκειτο για τέχνασμα. Αυτό που κρατούσε μαζί τα ημισφαίρια ήταν η πίεση του αέρα γύρω τους. Το κενό μέσα στη σφαίρα σήμαινε πως δεν υπήρχε αντίθετη πίεση για να εξισορροπήσει την εξωτερική δύναμη, η οποία ήταν ισχυρότερη από τη δύναμη των δεκαέξι αλόγων. Ο αυτοκράτορας απόμεινε εκστατικός, ένα συναίσθημα που απηχούσαν και τα κατάπληκτα πρόσωπα του συγκεντρωμένου πλήθους, που ξέσπασε σε χειροκροτήματα.

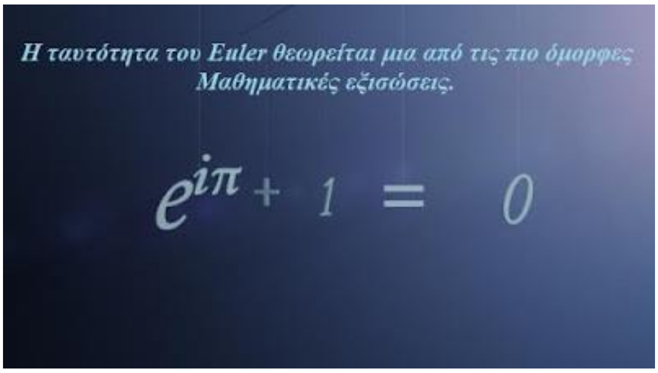
Ο Γκέρικε, όμως, σήκωσε το χέρι του επιβάλλοντας σιωπή. Το πείραμα δεν είχε τελειώσει ακόμα. Ο Γκέρικε αποσύνδεσε την αντλία. Το πλήθος άρχισε να κοιτάζει με περιέργεια. Ακούστηκε ξαφνικά ο συριστικός ήχος του αέρα που, λόγω της εξωτερικής πίεσης, εισερχόταν ορμητικά για να γεμίσει το κενό στην άδεια σφαίρα. Και τότε, χωρίς προειδοποίηση, τα δυο χάλκινα ημισφαίρια αποχωρίστηκαν από μόνα τους και έπεσαν καταγής. Δεν υπήρχε πλέον κενό και η εσωτερική πίεση ήταν ίση με την εξωτερική, οπότε δεν υπήρχε καμιά δύναμη για να τα κρατάει ενωμένα.

Το πείραμα του Γκέρικε έγινε σύντομα πολύ διάσημο και αυτός άρχισε να κάνει επιδείξεις σε ολόκληρη τη Γερμανία. Οι θρύλοι για τον άθλο του Μαγδεμβούργου έκαναν το γύρο της Ευρώπης, δεν έπαυαν να φιλοτεχνούνται γκραβούρες που τον απεικόνιζαν.

Αδαμαντία Θεοφάνους, Φώτος Κωνσταντίνος, Ευάγγελος Παπασταύρου

Το «ωραίον» στα μαθηματικά πλέον εξηγείται

Τα μαθηματικά μπορεί να είναι πραγματικά ωραία αφού, όπως απέδειξαν Βρετανοί ερευνητές, δημιουργούν στον εγκέφαλο την ίδια αίσθηση που γεννά ένα καλλιτεχνικό αριστούργημα ή η σύνθεση κάποιου μεγάλου μουσουργού.



Για να αποκαλύψουν την ομορφιά της μαθηματικής επιστήμης ή, καλύτερα, κάποιων μαθηματικών τύπων, οι επιστήμονες του University College του Λονδίνου επέδειξαν σε μαθηματικούς «όμορφες» και «άσχημες» εξισώσεις ενόσω υποβάλλονταν σε μαγνητική τομογραφία εγκεφάλου. Όπως διαπιστώθηκε, οι «όμορφες» εξισώσεις ενεργοποιούσαν τα ίδια εγκεφαλικά κέντρα με αυτά που δραστηριοποιούνται όταν αξιολογούμε κάποιο καλλιτεχνικό έργο ως ωραίο. Οι ερευνητές, λοιπόν, πιστεύουν ότι υπάρχει κάποια νευροβιολογική βάση στην ομορφιά.

Τα θεωρήματα του Πυθαγόρα και του Όιλερ σπάνια περιλαμβάνονται στην ίδια πρόταση με τα έργα του Σαίξπηρ, του Μότσαρτ ή του Μονέ. Και όμως, λένε οι ερευνητές, ο εγκέφαλός μας αναγνωρίζει κάτι κοινό σε όλα αυτά τα πράγματα: την ομορφιά.

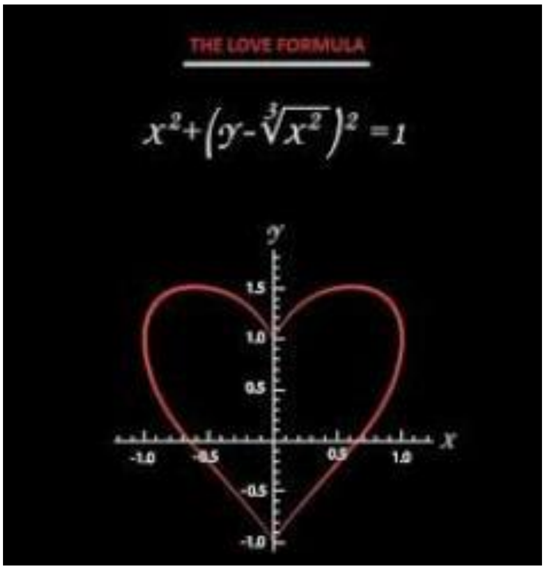
Οι ερευνητές έδωσαν σε *15* μαθηματικούς εξήντα εξισώσεις και τύπους και τους ζήτησαν να τις αξιολογήσουν. Όπως αναφέρει ένας εκ των επιστημόνων που πραγματοποίησαν την έρευνα, ο καθηγητής Σεμίρ Ζέκι, όταν βλέπουμε

εξισώσεις, ενεργοποιούνται πολλές περιοχές του εγκεφάλου. Όταν όμως κάποιος κοιτάζει έναν τύπο ο οποίος έχει χαρακτηριστεί «όμορφος», τότε ενεργοποιείται ο «συναισθηματικός εγκέφαλος» ακριβώς όπως όταν βλέπουμε έναν όμορφο πίνακα. Όσο πιο όμορφος είχε θεωρηθεί ο μαθηματικός τύπος, τόσο μεγαλύτερη ήταν η ενεργοποίηση του εγκεφάλου που καταγράφηκε στη διάρκεια της λειτουργικής μαγνητικής τομογραφίας (fMRI).
Στη μελέτη οι περισσότεροι μαθηματικοί επέλεξαν ως «ωραιότερη» την εξίσωση του Όιλερ καθώς περιλαμβάνει τις πέντε σημαντικότερες μαθηματικές σταθερές και τις τρεις βασικότερες αριθμητικές πράξεις, την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και την ύψωση σε δύναμη.
Ο μαθηματικός και καθηγητής Κατανόησης των Επιστημών, Μάρκους ντι Σοτουά επισημαίνει πως ο ίδιος βρίσκει την απόλυτη ομορφιά στα μαθηματικά και ότι ακριβώς αυτό το κάλλος λειτουργεί σαν κίνητρο για κάθε μαθηματικό. Ο Ντι Σοτουά, εξάλλου, σημειώνει ότι είναι πολύ κρίμα που ακριβώς αυτή η ομορφιά των μαθηματικών απουσιάζει από τα σχολεία και ότι ακόμα και μαθητές με στοιχειώδεις γνώσεις θα μπορούσαν να δουν καταπληκτικά πράγματα. Τέλος, η μελέτη, η οποία δημοσιεύεται στην επιθεώρηση Frontiers in Human Neuroscience, αποδεικνύει ότι τα μαθηματικά είναι όμορφα, αλλά πρόσφατα συνάδελφοί τους από το Πανεπιστήμιο του Μάντσεστερ είχαν αποδείξει ότι υπάρχει σχέση που συνδέει τις αριθμητικές αλληλουχίες και την ίδια τη φύση.

Πηγή : http://www.kathimerini.gr/

Γιώργος & Ευρώπη Ηλιοπούλου

Πώς θα ερωτευτείτε τα Μαθηματικά



«Κάθε φορά που ακούω κάποιον να λέει, "Λύσε τα Μαθηματικά", τρίζω τα δόντια μου. Η φράση αναφέρεται σχεδόν πάντα, σε μια τετριμμένη προτροπή με πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό και αποκαλύπτει την ελάχιστη γνώση που υπάρχει για το εύρος και το πεδίο εφαρμογής των Μαθηματικών», γράφει στην εφημερίδα NEW YORK TIMES ο μαθηματικός και συγγραφέας ***Manil Suri.*** «Φανταστείτε πόσοι πολλοί άνθρωποι τα ταυτίζουν με ένα μόνο χαρακτηριστικό τους : την αριθμητική», συμπληρώνει.
Στο άρθρο του με τίτλο, «Πώς θα ερωτευτείτε τα Μαθηματικά» τονίζει, ανάμεσα σε άλλα, ότι μπορεί να επιβεβαιώσει ότι συνδέονται, περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη επιστήμη, με τις ιδέες. Εκείνες που έχουν σχέση με την ύπαρξή μας, οι οποίες εκτείνονται στο σύμπαν και πέρα από αυτό και, σίγουρα, μπορούν να προκαλέσουν την έκπληξη και τη συγκίνησή μας. Στις πιο ενδιαφέρουσες μαθηματικές ιδέες κατατάσσει τον τρόπο που το άπειρο τιθασεύεται για να συμφιλιωθεί με το πεπερασμένο, με παραδείγματα από τα Φράκταλς ως τον Λογισμό, και λέει : «σκεφτείτε την άπειρη ποικιλία των δεκαδικών αριθμών – ένα θαύμα των Μαθηματικών που ικανοποιεί κάθε ανάγκη μέτρησης, κάτω από έναν αυθαίρετο αριθμό ψηφίων».
Για να εξάψει το ενδιαφέρον των αναγνωστών θέτει μια σειρά από ερωτήματα : «θέλετε να μάθετε περισσότερα για το τι σημαίνουν οι διαφορετικές αποχρώσεις ενός χρώματος ; Θα μπορούσε το παράδειγμα της Μεγάλης Έκρηξης να σας κάνει να αναρωτηθείτε για την προέλευση των αρνητικών αριθμών, των κλασμάτων ή των άρρητων αριθμών ; Υπάρχει περίπτωση η συναρπαστική αναγνώριση του κύκλου ως ορίου των πολυγώνων να σας παρασύρει να δείτε μια σφαίρα ως τη στοίβα των κυκλικών εγκάρσιων τομών της, όπως έκανε, *2.000* χρόνια πριν, ο Αρχιμήδης για να υπολογίσει τον όγκο της ;
Ο Manil Suri επισημαίνει ότι, σε αντίθεση με τις στερεότυπες αντιλήψεις των περισσότερων ανθρώπων για τα Μαθηματικά, αρκετές μαθηματικές ιδέες δεν απαιτούν ειδικές γνώσεις για να εκτιμηθούν. «Σκεφτείτε», καταλήγει, «ότι για να εκτιμήσετε έναν πίνακα ζωγραφικής δεν είναι απαραίτητο να ξέρετε να ζωγραφίζετε, ούτε και η απόλαυση της συμφωνικής μουσικής προϋποθέτει την ικανότητά σας να διαβάζετε παρτιτούρες».

Από την ιστοσελίδα Θαλής + Φίλοι, Πηγή : New York Times *Από τους μαθητές Ιωάννη Ζήγο & Χριστίνα Φιφή*

Évariste Galois

Ο Évariste Galois (Εβαρίστ Γκαλουά) γεννήθηκε στις *25* Οκτωβρίου του *1811*, στο Bourg–la–Reine. Ο πατέρας του ήταν δημοκρατικός, στέλεχος του Φιλελεύθερου Κόμματος, και από το *1814* δήμαρχος του χωριού. Η μητέρα του ήξερε λατινικά και διάβαζε τους κλασικούς στο πρωτότυπο. Αυτή ήταν η πρώτη του δασκάλα.

Το *1823*, ο μικρός Évariste έγινε δεκτός με υποτροφία στο Lycée Louis–le–Grand, δημόσιο σχολείο της δεύτερης βαθμίδας στο Παρίσι. Στα πρώτα δύο χρόνια τα πήγαινε τόσο καλά που τον προώθησαν στην τάξη της ρητορικής, την οποία παρακολουθούσαν οι καλύτεροι μαθητές. Και τότε διάβασε τα *Στοιχεία Γεωμετρίας* του Adrien–Marie Legendre (Γάλλου μαθηματικού) και ερωτεύτηκε τα μαθηματικά.

Έπεσε με τα μούτρα στο διάβασμα, ρούφηξε τα βιβλία του Joseph–Louis Lagrange και, φύσει παρορμητικός, αποφάσισε να δώσει εισαγωγικές εξετάσεις στην École polytechnique. Απέτυχε γιατί δεν είχε προετοιμαστεί για *τέτοιες* εξετάσεις. Οι εξεταστές δεν τον κατέλαβαν. Επέστρεψε με βαριά καρδιά στο Louis–le–Grand, αλλά δεν είχε μυαλό παρά μόνο για μαθηματικά.

Σύμφωνα με τον καθηγητή του των μαθηματικών Vernier, «Τον έχει καταβάλει ένα απέραντο πάθος για τα μαθηματικά. Νομίζω θα ήταν καλύτερο, αν συμφωνούν οι γονείς του, να σπουδάσει μόνο αυτή την επιστήμη: ως σπουδαστής στην τάξη της ρητορικής σπαταλά τον χρόνο του, ενοχλεί τους καθηγητές και επισύρει την οργή και τιμωρίες.» Είχε αρχίσει να σπάει νεύρα στο σχολείο. Εντωμεταξύ, συνεχίζοντας την οικογενειακή δημοκρατική παράδοση, αναμείχθηκε και στην πολιτική με πάθος. Για να γλιτώσουν απ' αυτόν, η διοίκηση του επέτρεψε να κάνει μόνο μαθηματικά, με τον Louis–Paul Richard, σύμφωνα με τον οποίο, «Ο Galois ασχολείται μονάχα με θέματα ανώτερων μαθηματικών». Στην εφηβεία του αυτά. Κάπου εκεί διάβασε ό,τι βρήκε από τα άρθρα του Abel και εντυπωσιάστηκε.

Το *1829*, στα *18* του, δημοσίευσε την πρώτη του εργασία (περί των συνεχών κλασμάτων) και την υπέβαλε, μαζί με κάποιες άλλες, στην Académie des sciences για κρίση. Ο μέγας (αλλά ιδιόρρυθμος) Augustin–Louis Cauchy υποσχέθηκε να τις παρουσιάσει, αλλά το ξέχασε. Κι από πάνω, έχασε και τα χειρόγραφα! (Ήταν ο ίδιος αυτός Cauchy που είχε χάσει και το χειρόγραφο του Abel με το θεώρημα για μια γενική ιδιότητα των υπερβατικών συναρτήσεων). Το καλοκαίρι της ίδιας χρονιάς, καθώς προετοιμάζεται για να ξαναδώσει στην École polytechnique, ο πατέρας του, μην αντέχοντας τις πιέσεις του τοπικού κλήρου και το κυνήγι των Ιησουιτών, αυτοκτόνησε. Μεγάλο το πλήγμα για τον νεαρό. Λίγες βδομάδες αργότερα, πήγε να δώσει τις ίδιες εισαγωγικές εξετάσεις για δεύτερη φορά. Απέτυχε και πάλι. Αυτή τη φορά όχι επειδή δεν ήταν προετοιμασμένος, αλλά επειδή οι εξεταστές του δεν καταλάβαιναν τι τους έλεγε· εκείνοι περίμεναν έναν τυπικό επίδοξο προπτυχιακό φοιτητή, κι εκείνος τους έδειχνε μαθηματικά που τους ξεπερνούσαν. Ο μικρός τούς είχε βάλει δύσκολα κι εκείνοι προσπάθησαν να ξεφύγουν από τη διάνοιά του προτάσσοντας τον σχολαστικισμό τους (αγαπημένη τακτική του ακαδημαϊκού ιερατείου – διαχρονικά). Αργότερα είπε ότι του την έδωσε που οι εξεταστές διέκοπταν τις απαντήσεις του γελώντας σαν τρελοί. Κάποια στιγμή δεν άντεξε, πέταξε το σφουγγάρι στα μούτρα ενός εξεταστή και σηκώθηκε κι έφυγε.

Οι ακαδημαϊκοί τον είχαν απογοητεύσει, αλλά εκείνος συνέχισε να παράγει ανώτερα μαθηματικά. Στο μυαλό του, όσοι είχαν εξουσία (είτε μαθηματικοί είτε πολιτικοί) ήθελαν κρέμασμα. Παράλληλα, μπήκε ακόμα πιο βαθιά στην πολιτική, φανατικά στο πλευρό των αντιβασιλικών. (Μοιραία επιλογή: λάθος εποχή να είσαι αντιβασιλικός στη Γαλλία της δεύτερης δεκαετίας του *19ου* αιώνα.)

Στις αρχές *1830* ολοκλήρωσε άλλες τρεις εργασίες και τις υπέβαλε πάλι για κρίση στην Académie des sciences, στο πλαίσιο του διαγωνισμού για το Μεγάλο Βραβείο των Μαθηματικών. Αυτή τη φορά, ήταν ο σπουδαίος μαθηματικός Joseph Fourier, τότε γραμματέας της Ακαδημίας Επιστημών, που υποσχέθηκε να τις διαβάσει. Αλλά δεν πρόλαβε: πέθανε τον Μάιο. Και το κερασάκι: τα χειρόγραφα του Galois δεν βρέθηκαν στο γραφείο του Fourier. Είχαν εξαφανιστεί. Πάλι! Και όμως, ξαναπροσπάθησε. Έκατσε και ξανάγραψε την εργασία που δεν πρόλαβε να δει ο Fourier και την υπέβαλε ξανά για κρίση στην Ακαδημία. Κριτές αυτή τη φορά οι Lacroix και Poisson. Μετά από αφύσικα μεγάλο χρονικό διάστημα, ο Galois έμαθε ότι το χειρόγραφό του είχε απορριφθεί. Στο σκεπτικό της απόρριψης, ο Lacroix σημείωνε: «Η απόδειξη δεν ήταν ούτε αρκετά καθαρή ούτε αρκετά αναπτυγμένη ώστε να μας επιτρέψει να κρίνουμε την ακρίβειά της». Ο Galois είχε το ελάττωμα (ή το προτέρημα, κατά Gauss) να μην αναπτύσσει λεπτομερώς κάποια ενδιάμεσα βήματα, κατά την κρίση του βαρετά ή/και αυτονόητα. (Επειδή οι ιδιοφυείς άνθρωποι βρίσκονται κατά κανόνα στον κόσμο τους, απαιτείται μία ιδιαίτερη δεξιότητα από μέρους του περίγυρου προκειμένου οι χαρισματικοί να *παραμείνουν* στον κόσμο τους και να *δημιουργούν* απερίσπαστοι.

Αυτή η δεξιότητα γενικά δεν ευδοκιμεί στην ακαδημαϊκή κοινότητα.) Τέλος πάντων, ο Galois κατάλαβε ότι δεν πρόκειται να βγάλει άκρη με την ακαδημαϊκή κοινότητα και τα παράτησε. Όχι τα μαθηματικά – τις προσπάθειες να αναγνωριστεί το έργο του. Τα μαθηματικά τα συνέχισε, περισσότερο στο μυαλό του παρά στο χαρτί, γιατί εντωμεταξύ του συνέβησαν διάφορα. Το *1831* τον συνέλαβαν δύο φορές. Την πρώτη τον Μάιο, για συνωμοσία δολοφονίας του βασιλιά Louis–Philippe I. Τι είχε συμβεί; Ο Galois ανήκε σε μια μονάδα πυροβολικού της Εθνοφρουράς που ήταν γνωστή, ως σύνολο, για τα αντιβασιλικά της φρονήματα. Ο βασιλιάς καλού-κακού διέλυσε τη μονάδα και πέρασε από δίκη *19* αξιωματικούς της. Οι ανυπόστατες κατηγορίες κατέπεσαν στο δικαστήριο. Η συγκέντρωση που οργανώθηκε για να εορταστεί το γεγονός εξελίχθηκε σε εξέγερση. Την επομένη, συνέλαβαν τον Galois επειδή στη συγκέντρωση, λέει, έκανε πρόποση στο όνομα του βασιλιά, έχοντας τοποθετήσει ένα μαχαίρι πάνω στην κούπα του. Άρα; Σχεδίαζε να τον σκοτώσει! Το δικαστήριο τον αθώωσε από την αστεία κατηγορία.

Όμως, τη δεύτερη φορά δεν τη γλίτωσε τη φυλακή. Τον Ιούλιο ο Galois πήρε μέρος σε μια αντιβασιλική διαδήλωση, πρώτος-πρώτος, φορώντας τη στολή του γνωστού (και διαλυμένου) τάγματος πυροβολικού, πράγμα το οποίο απαγορευόταν. Εκτός αυτού, ήταν οπλισμένος σαν αστακός, με διάφορα πιστόλια, τουφέκι και μαχαίρι. Ευκαιρία ζητούσαν οι βασιλικοί, που έτσι κι αλλιώς συλλάμβαναν τους αντιφρονούντες προληπτικά για να αποτρέψουν μία ενδεχόμενη εξέγερσή τους: νέα σύλληψη του Galois. Και ποινή φυλάκισης *6* μηνών. Στη φυλακή δεν κάθισε με σταυρωμένα χέρια: έκανε μαθηματικά. Ίσως και τα περισσότερα της (σύντομης) ζωής του γιατί δεν είχε και τι άλλο να κάνει.

Εντούτοις, όταν αποφυλακίστηκε, ήταν ψυχικά καταρρακωμένος. Ούτε στα μαθηματικά ούτε στην πολιτική πήγαιναν τα πράγματα όπως επιθυμούσε. Και σαν μην έφταναν όλα αυτά, ερωτεύτηκε! Μα ούτε και στον έρωτα βρήκε γιατρειά. Δεν είναι γνωστές οι λεπτομέρειες των θλιβερών περιστατικών που οδήγησαν στον πρόωρο θάνατό του, συνεπώς θα αρκεστούμε σε ενδείξεις, εικασίες και αντικρουόμενες μαρτυρίες.

Φαίνεται πώς ο Galois ερωτεύτηκε μία δεσποσύνη ονόματι Stéphanie–Félicie Poterin du Motel. Ήταν κόρη ενός γιατρού, η οικογένεια του οποίου έμενε στην ίδια πανσιόν όπου πέρασε και ο Galois τους τελευταίους μήνες της ζωής του. Στην αλληλογραφία του προς φίλους δεν αναφέρει το όνομα της νεαρής κι έτσι δεν είναι σίγουρο ότι πρόκειται για την Stéphanie. Όποια κι αν ήταν η αξιέραστος κόρη, το βέβαιο είναι ότι ο νεαρός είχε δαγκώσει τη λαμαρίνα ! Από κάτι υπαινιγμούς στην αλληλογραφία του, προκύπτει ότι η περί ης ο λόγος τού είχε εκμυστηρευτεί κάποια μυστικά της, γεγονός που κάποιος άλλος έκρινε ως λόγο ικανό να καλέσει στις *29* Μαΐου του *1832* τον Galois σε μονομαχία την επόμενη μέρα. Ποιος ήταν αυτός ο άλλος; Κατά μία εκδοχή (οφειλόμενη στον Alexandre Dumas) ήταν κάποιος Pescheux d'Herbinville, μνηστήρας της Stéphanie. Κατά μία άλλη εκδοχή, ήταν κάποιος πολιτικός του συνοδοιπόρος, ίσως ο Ernest Duchatelet, με τον οποίο έκανε μαζί στη φυλακή, εκτίοντας την ίδια ποινή και για τις ίδιες κατηγορίες.

Όποιος κι αν ήταν ο εγκαλών, ο λόγος της μονομαχίας ήταν γυναικοδουλειά. Ο Galois έγραψε σε ένα από τα γράμματα της προτελευταίας του νύχτας: «Πεθαίνω και γι' αυτό φταίει μια άθλια πόρνη. Η ζωή μου θα τελειώσει σε μία απαίσια μονομαχία». Το σκοτεινό αντικείμενο του πόθου ενίοτε αποδεικνύεται σκοτεινό υποκείμενο. (Και τότε δεν σε σώζουν ούτε όλα τα μαθηματικά τού κόσμου).

Στις *30* Μαΐου του *1832*, λίγο μετά τα χαράματα, οι δύο μονομάχοι συναντήθηκαν στο προκαθορισμένο μέρος. Διάλεξαν πιστόλια και στάθηκαν αντιμέτωποι σε απόσταση *25* βημάτων. Ο Galois χτυπήθηκε στην κοιλιά. Πέθανε στο νοσοκομείο το μεσημέρι της επόμενης μέρας, *31* Μαΐου, από οξεία περιτονίτιδα. Ήταν *20* χρονών. Τα τελευταία του λόγια ήταν προς τον Alfred, τον νεαρότερο αδερφό του: "Ne pleurepas, Alfred! J'ai besoin de tout mon courage pour mourir à vingt ans". («Μην κλαις, Alfred! Χρειάζομαι όλο μου το κουράγιο για να πεθάνω είκοσι χρονών».)

Τη νύχτα πριν τη μοιραία μονομαχία, ο Galois δεν κοιμήθηκε· την πέρασε γράφοντας γράμματα στους φίλους του. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γράμμα προς τον καλύτερό του φίλο, τον Auguste Chevalier, κι αυτό γιατί περιέχει το διασημότερο έργο του Galois στα μαθηματικά: τις βασικές κατευθύνσεις της θεωρίας που σήμερα είναι γνωστή ως *Θεωρία Γκαλουά*. Επειδή ήθελε να προλάβει να τελειώσει πριν ξημερώσει, παρέλειπε πολλά βήματα της ανάλυσής του, τα οποία συμπλήρωσαν με τα χρόνια άλλοι μαθηματικοί. Άφηνε επίσης οδηγίες στον Chevalier να δώσει το χειρόγραφο είτε στον Jacobi είτε στον Gauss. Στα περιθώρια του χειρόγραφου είχε γράψει πολλές φορές: «δεν έχω χρόνο· δεν έχω χρόνο». Η συγκλονιστικότερη πνευματική διαθήκη στην ιστορία των μαθηματικών.

Επιμελήθηκε η μαθήτρια Θεοφάνους Ευαγγελία

Μαθηματικά και λογοτεχνία

Ο κόσμος των μαθηματικών φαντάζει ως ένα σύμπαν ερμητικά κλειστό για τους μη μυημένους. Η μόδα όμως της «μαθηματικής λογοτεχνίας», συνέβαλε ώστε να ανατραπεί αυτό το στερεότυπο: όσοι δεν έχουν καλή σχέση με τους αριθμούς, μικροί και μεγάλοι, μπορούν να απολαύσουν ένα μαθηματικό μυθιστόρημα ή ένα βιβλίο που συμβάλει στην κατανόηση του μαγικού κόσμου των μαθηματικών.
Σε αυτή τη στήλη θέλοντας να αναδείξουμε την επίδραση των μαθηματικών στη λογοτεχνία παρουσιάζουμε κάθε φορά βιβλία που αναδεικνύουν αυτήν την σχέση μαθηματικών και λογοτεχνίας. Επιμελείται η μαθήτρια ***Σκαμνέλου Χριστίνα*** .

“ Ο ΓΚΑΛΟΥΑ ΚΑΙ ΤΟ ΚΛΕΙΔΙ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ”

- Συγγραφέας: **Stewart Ian** Χρονολογία: *2007*

Το πρόσωπο που άλλαξε την πορεία των μαθηματικών ήταν ο Εβαρίστ Γκαλουά. Η ημερομηνία της μονομαχίας με τον αντίζηλό του ήταν δεδομένη· κι αυτός ο ιδιοφυής εικοσάχρονος, αντί να εξασκείται στη σκοποβολή, προσπαθούσε νυχθημερόν να βρει τη λύση στο γρίφο που κληρονόμησε από τον Άμπελ: ποιος είναι ο μαθηματικός τύπος που δίνει τις λύσεις της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης; Συμμετρία: η έννοια-κλειδί στα έργα των εικαστικών, των αρχιτεκτόνων και των μουσικών. Όμως, για τους μαθηματικούς, η "συμμετρία των εξισώσεων" παρέμενε, στο διάβα των αιώνων, μια αγωνιώδης αναζήτηση.

Μια παράξενη ιστορία ανακάλυψης με πλήθος εκκεντρικών πρωταγωνιστών: ο Βαβυλώνιος γραφέας· ο αναγεννησιακός χαρτοπαίχτης Καρντάνο που έκλεβε μαθηματικές μεθόδους· ο αδικοχαμένος φυματικός Άμπελ· ο "πρίγκιπας των μαθηματικών" Γκάους· το ορόσημο Γκαλουά· ο ευγενής Χάμιλτον που -στο ντελίριο της οινοποσίας- σκάλισε τις απαράμιλλης έμπνευσης εξισώσεις του πάνω σε μια πέτρινη γέφυρα· ο Κίλινγκ και οι ομάδες Λι με τις *248* διαστάσεις· ο Αϊνστάιν και οι θεωρητικοί φυσικοί της κβαντικής μηχανικής που περιγράφουν το σύμπαν... Χαράματα, λίγο πριν ξεκινήσει για τη θανάσιμη μονομαχία, ο Γκαλουά γράφει: "...δεν μπορεί να επιλυθεί, επειδή έχει τον εσφαλμένο τύπο συμμετρίας...". Συγκεντρώνει βιαστικά όλες τις πρωτόγνωρες επινοήσεις του για τη "θεωρία ομάδων", και φεύγει... για χάρη μιας γυναίκας. Ο Γκαλουά δέχεται μια αρχαία μαθηματική παράδοση, την άλγεβρα, και εφευρίσκει σ αυτήν ένα νέο εργαλείο για τη μελέτη της συμμετρίας. Κρατά στο χέρι του το κλειδί για τη βασιλική οδό προς το αύριο. Σήμερα, η μελέτη των "ομάδων συμμετρίας" που συνδέονται με τους οκταδικούς αριθμούς, ίσως σηματοδοτεί την ενοποίηση κβαντικής θεωρίας, σχετικότητας, και υπερχορδών. Η ύπαρξη του σύμπαντος ερμηνεύεται και η πολυπόθητη "Θεωρία των Πάντων" βρίσκεται σε απόσταση αναπνοής.

Μαθηματικά Θετικού προσανατολισμού

Για τους μαθητές της Γ Λυκείου , επιμέλεια ***Σαρδελή Κατερίνα***

Λύσεις των ασκήσεων του *3ου* τεύχους :

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $εφx = x$ έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις.

   - $εφx = x$ ή ισοδύναμα $\frac{ημx}{συνx} = x$ ή $ημx - x\, συνx = 0$. Εφαρμόζουμε τώρα το **θεώρημα Bolzano** για τη συνεχή συνάρτηση $f(x) = ημx - x\, συνx$ σε καθένα από τα διαστήματα $Aκ = [\, 2κπ - \frac{π}{2}\, ,\, 2κπ + \frac{π}{2}\,]$ όπου $κ$ ακέραιος.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη για κάθε $x > \frac{1}{2}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(1) = 5f(2)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > \frac{1}{2}$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $ξ \in (1,\, 2)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(ξ)}{f(ξ)} = -\frac{1}{ξ}\cdot\frac{6ξ - 1}{3ξ - 1}$.

- Η δοθείσα σχέση για $\xi = x$ γίνεται $f'(x)(3x^2 - x) = -f(x)(6x - 1)$ ή $f'(x)(3x^2 - x) + f(x)(6x - 1) = 0$.

  Έστω τώρα η συνάρτηση $g(x) = f(x)\,(3x^2 - x)$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ (ως γινόμενο συνεχών), παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 2)$ με $g'(\xi) = \frac{g(2) - g(1)}{2 - 1}$ $\quad g(2) = 10f(2)$

  $g(1) = 2f(1) = 2\cdot 5f(2) = g(2)$

  άρα $f'(\xi)(3\xi^2 - \xi) + f(\xi)(6\xi - 1) = 0$ άρα $f'(\xi)(3\xi^2 - \xi) = -f(\xi)(6\xi - 1)$

  ή $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{1}{\xi}\cdot\frac{6\xi - 1}{3\xi - 1}$ $\quad (f(x) \neq 0)$

Προτεινόμενες ασκήσεις :

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, και για κάθε x που ανήκει στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(x) \neq 0$ υπάρχει $y \in [a, \beta]$ με $|f(y)| < |f(x)|$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$.

2. *Έστω η συνάρτηση* $f(x) = x + e^x - 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$./

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x) - x + 1) > 1$.

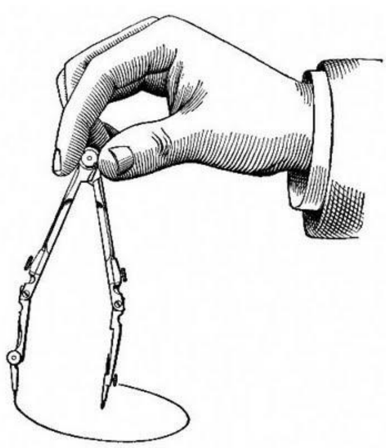
iv. Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως μονότονη συνάρτηση $g: IR \rightarrow IR$ η οποία για κάθε $x \in IR$ ικανοποιεί τη σχέση $g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1$. *Να αποδείξετε ότι:*

α) η g είναι γνησίως αύξουσα $\qquad$ *β)* η C_g διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

v. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(g \circ g)(x) - g(1 - x^{2012}) = 0$, *έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0, 1).*

Οι λύσεις στο επόμενο φύλλο της εφημερίδας.

Ο ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ



Ο Τετραγωνισμός του κύκλου είναι ένα από τα αρχαιότερα γεωμετρικά προβλήματα. Η διατύπωση του είναι απλή: Ζητείται η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν να είναι ίσο με το εμβαδόν ενός δοθέντος κύκλου. Το *1882*, ο μαθηματικός Φέρντιναντ Φον Λίντεμαν (Ferdinand von Lindemann) απέδειξε το αδύνατο της επίλυσης του προβλήματος. Τετραγωνίζω τον κύκλο σημαίνει ότι κατασκευάζω, με γεωμετρική ή αλγεβρική μέθοδο, ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του κύκλου. Η δυσκολία του προβλήματος συνίσταται σε δύο περιορισμούς που έθεσαν σε αυτό οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί. Πιο συγκεκριμένα, για να θεωρηθεί αποδεκτή μία λύση του προβλήματος, σε αυτήν θα πρέπει: να χρησιμοποιηθεί μόνο κανόνας και διαβήτης, προκειμένου η απόδειξη να ανάγεται πλήρως στα θεωρήματα του Ευκλείδη, και να μην πραγματοποιείται μετά από άπειρο αριθμό βημάτων. Αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου επιλύεται εύκολα αν άρουμε οποιονδήποτε από αυτούς τους δύο περιορισμούς. Η επίλυση του προβλήματος συνδέεται άμεσα με την υπερβατικότητα του αριθμού π: Αν κάποιος έχει καταφέρει να τετραγωνίσει τον κύκλο, σημαίνει ότι με κάποιο τρόπο έχει υπολογίσει μία συγκεκριμένη αλγεβρική τιμή για το π. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι εφικτό στην περίπτωση που ο αριθμός π είναι υπερβατικός, οπότε δεν έχει συγκεκριμένη αλγεβρική τιμή. Πράγματι, το ενδιαφέρον για την επίλυση του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου εξανεμίζεται το *1882*, όταν ο Φέρντιναντ Φον Λίντεμαν (Ferdinand von Lindemann) απέδειξε ότι το π είναι υπερβατικός αριθμός. Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι ένα από τα διασημότερα μαθηματικά προβλήματα. Ένα μεγάλο πλήθος μαθηματικών, από την αρχαιότητα μέχρι τα τέλη του 19ου αιώνα, έχουν αφιερώσει μεγάλο κομμάτι της εργασίας τους στην προσπάθεια να τετραγωνίσουν τον κύκλο. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η φράση «τετραγωνίζω τον κύκλο» να υιοθετηθεί και από την κουλτούρα των μη μυημένων στα μαθηματικά, ως συνώνυμη του «επιδιώκω το ακατόρθωτο / το καταδικασμένο σε αποτυχία». Στην ελληνική γλώσσα για παράδειγμα, η φράση «σιγά μην τετραγωνίσουμε και τον κύκλο» υποδηλώνει άρνηση συμμετοχής σε μια προσπάθεια που είναι από δύσκολο έως αδύνατο να οδηγήσει σε επιτυχία.

Μαρία Καζαντζίδη

Μαθηματικοί Γρίφοι

Από τους μαθητές Ιωάννη Σιάρκο, Βερύκιο Απόστολο &

Γιώργο Μπούρα

Σε αυτή τη στήλη της εφημερίδας παρουσιάζονται μαθηματικοί γρίφοι και σταυρόλεξα, Sudoku (και οι λύσεις του προηγούμενου φύλλου)

Λύση 3ου τεύχους

Νο 3

2	6	5	1	4	8	9	7	3
8	9	3	7	2	6	4	5	1
7	1	4	9	3	5	8	6	2
3	8	7	4	9	1	5	2	6
9	4	6	2	5	3	7	1	8
1	5	2	6	8	7	3	4	9
6	2	9	8	7	4	1	3	5
5	7	1	3	6	9	2	8	4
4	3	8	5	1	2	6	9	7

Νο 4

	8			2	1			
	5			3		9	7	1
	4		9					
8		4	3		6	7		5
7	9						6	2
1		5	2		9	3		8
					5		3	
5	7	6		4			1	
			1	6			8	

1. Ο Καφές

Η Έλενα έπινε καφέ με τις φίλες της. Γεμίζει το φλιτζάνι της με καφέ και πίνει το *1/3* , αλλά τον βρίσκει ‘ δυνατό ’. Συμπληρώνει με γάλα και ξαναπίνει το *1/3*, αλλά τον βρίσκει πάλι ‘ δυνατό ’. Ξανασυμπληρώνει με γάλα και πίνει το *1/3*. Τώρα της φαίνεται ‘ ελαφρύς ’ αλλά της αρέσει η γεύση του γάλακτος. Ξανασυμπληρώνει με γάλα και το πίνει όλο. Τελικά τι ήπιε περισσότερο; Καφέ ή γάλα ;

2. Τα δίδυμα αδέλφια

Σ ένα σπίτι μένουν δύο αδέλφια, ο Μάριος και ο Σταύρος. Ο ένας λέει πάντα ψέματα και ο άλλος πότε αλήθεια και πότε ψέματα, αλλά είναι ολόιδιοι οπότε οι γείτονές τους δεν τους ξεχωρίζουν. Στη γιορτή του Μάριου ένας γείτονας πήγε να ευχηθεί. Ρώτησε τον έναν αν είναι ο Μάριος και εκείνος του απάντησε όχι. Ρώτησε και τον άλλο, αλλά δε γνωρίζουμε τι του απάντησε (ναι ή όχι) Ο γείτονας κατάλαβε ποιος ήταν ο Μάριος και του ευχήθηκε για τη γιορτή του. Τι απάντησε ο 2ος αδελφός και ποιος ήταν ο Μάριος;

3. Ο πεινασμένος βιβλιοφάγος

Ένας πεινασμένος βιβλιοφάγος αρχίζει να τρώει λαίμαργα μια ομάδα από πέντε τόμους μιας εγκυκλοπαίδειας, ξεκινώντας από το εξώφυλλο του πρώτου τόμου φθάνοντας στο οπισθόφυλλο του πέμπτου τόμου. Κάθε τόμος της εγκυκλοπαίδειας έχει πάχος 3 εκατοστά και όλοι τους είναι τοποθετημένοι στο ράφι, αφού έχουν ταξινομηθεί αριθμητικά .
Αν θεωρήσετε ότι ο βιβλιοφάγος κινείται ευθύγραμμα και παράλληλα προς το ράφι, μπορείτε να βρείτε πόση απόσταση κάλυψε τρώγοντας το αγαπημένο του φαγητό;

Απαντήσεις :

1. Η Έλενα χωρίς να συμπληρώσει με καφέ, στο τέλος ήπιε όλο το φλιτζάνιο, άρα ήπιε συνολικά *1* φλιτζάνι καφέ. Ακόμα, συμπλήρωσε *3* φορές συνολικά το *1/3* με γάλα και το ήπιε όλο, δηλαδή ένβα φλιτζάνι γάλα. Άρα ήπιε το ίδιο καφέ και γάλα.

2. Αν ο *2ος* αδελφός είχε απαντήσει όχι, όπως και ο *1ος*, ο γείτονας δε θα μπορούσε να καταλάβει ποιος ήταν ο Μάριος, άρα ο *2ος* αδελφός απάντησες ναι. Όμως τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι ψέμα, άρα είναι και το άλλο, αφού αν ήταν μόνο το ένα θα υπήρχαν ή δύο ή κανένας Μάριος. Άρα αυτός που απάντησε όχι ήταν ο Μάριος.

3. Η απάντηση απλή, εννέα εκατοστά αφού όπως φαίνεται και στο σκίτσο είναι η απόσταση τριών τόμων.