

Απρίλιος - Μάιος 2017, Μουσικό Σχολείο Πρέβεζας

Τιμή: 1 €



## Περιεχόμενα

	Σελ.
14/3 : Παγκόσμια ημέρα του π .....	3
Ο μύθος του «είμαι κακός στα μαθηματικά» . Stephen Hawking – Τι είναι μία επιστημονική θεωρία; .....	3 5
Από τη Γη στη Σελήνη .....	7
Ρενέ Ντεκάρτ: Μαθηματικός, φιλόσοφος, διανοητής .....	10
Τι είναι το φαινόμενο της πεταλούδας .....	11
Μια επιστολή από τον Άλμπερτ Αϊνστάιν στην κόρη του .....	13
Ο κύκλος των εννέα σημείων Μαθηματικά και λογοτεχνία .....	14 16
Μαθηματικά Θετικού προσανατολισμού Παιχνίδι με τους αριθμούς!! .....	17 19
Μαθηματικοί Γρίφοι .....	20

Η εφημερίδα θα έχει σε κάθε τεύχος της, μόνιμες στήλες, όπως για παράδειγμα *Μαθηματικά και λογοτεχνία*, προτεινόμενες ασκήσεις, quiz και προβληματισμούς για τις διάφορες τάξεις του Λυκείου και του Γυμνασίου, θέματα διαγωνισμών, ιστορικά στοιχεία και άλλα θέματα που πιστεύουμε ότι θα κρατήσουν αμείωτο το ενδιαφέρον των αναγνωστών.

Ευχόμαστε να απολαύσετε όσο και εμείς αυτό το ταξίδι στο άπειρο και τελειώνοντας την ανάγνωση, να δείτε τον κόσμο γύρω σας με άλλα μάτια, μάτια που θα βλέπουν πιθανότητες και προοπτικές σε κάθε νέα μέρα που ξημερώνει...

*Η συντακτική ομάδα*

Η αγάπη μας για τα μαθηματικά, μια επιστήμη με ανεξάντλητες δυνατότητες και εφαρμογές,, μας έκανε να δοκιμάσουμε τις δυνάμεις μας εκδίδοντας μια εφημερίδα όπου θα προσπαθήσουμε να κολυμπήσουμε λίγο πιο βαθιά στον αχανή κόσμο των μαθηματικών.

"Το **Π**" είναι η δεύτερη μαθητική εφημερίδα που εκδίδει το Μουσικό Σχολείο Πρέβεζας μαζί με την εφημερίδα '**Στη Διαπασών**'.

Το όνομα της εφημερίδας την εμπνευστήκαμε φυσικά από τον αριθμό π, να αυτόν τον γνωστό αριθμό 3,14. Η εφημερίδα επιμελείται και εκδίδεται στα πλαίσια της ερευνητικής εργασίας (*Project*) με θέμα '**Ο Κόσμος είναι Μαθηματικά**' που υλοποιείται στο σχολείο από τους μαθητές της Β' Τάξης του Λυκείου, με την αρωγή των καθηγητών αλλά και άλλων μαθητών του σχολείου. Στόχος μας είναι να εκδίδεται για το τρέχον σχολικό έτος 2016-2017, αλλά και να συνεχιστεί γιατί όχι και τα επόμενα χρόνια.

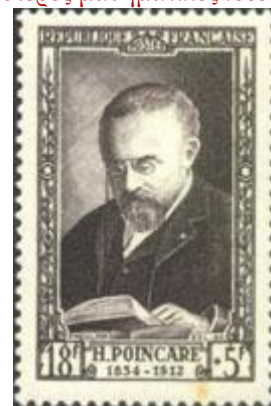
Ο αρχικός σχεδιασμός είναι να εκτυπωθούν 16 ή 20 σελίδες ποικίλου μαθηματικού ενδιαφέροντος με υλικό από το διαδίκτυο, περιοδικά και βιβλία, αλλά και με θέματα που αφορούν και άλλες θετικές επιστήμες. Αναγνώστες της εφημερίδας μπορεί να είναι μαθητές με κλίση και αγάπη για τα μαθηματικά και όχι μόνο, καθηγητές αλλά και οποιοσδήποτε μπορεί μέσα από τα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες να δει κάτι περισσότερο από σύμβολα και αριθμούς. Σίγουρα για τους αθεράπευτα ρομαντικούς του χώρου των μαθηματικών θα είναι μια ξενάγηση σε έναν υπέροχο κόσμο. Λένε πως τα μαθηματικά είναι σαν ένα σκοτεινό δωμάτιο, δεν ξέρεις τί υπάρχει μέσα, αλλά σίγουρα δεν είναι άδειο. Βασισμένοι σε αυτό, κάναμε σκοπό αυτής της εφημερίδας να σας φέρουμε λίγο πιο κοντά σε αυτή την από πολλούς παρεξηγημένη επιστήμη ως δύσκολη, ακατανόητη και ανούσια.

Η συντακτική μας ομάδα αυτή τη στιγμή απαρτίζεται από μαθητές, ενώ οποιοσδήποτε μπορεί να ασχοληθεί με την εφημερίδα και να συμμετάσχει στην έκδοσή της. Υπεύθυνος Καθηγητής *Κώστας Μάνθος*.

Τι είδους άνθρωποι ήταν αυτοί που δημιούργησαν τα μαθηματικά, από τους αρχαίους Έλληνες έως τον Poincare ; Ποια είναι η προσωπικότητα των μεγάλων αυτών μαθηματικών, ποια η θέση τους στο πνεύμα της κάθε εποχής και στο κοινωνικό, πολιτικό, φιλοσοφικό ή θρησκευτικό πλαίσιο στο οποίο γεννήθηκαν και αναπτύχθηκαν οι μεγαλύτερες μαθηματικές ιδέες, άλλοτε με την ενθάρρυνση, συχνότερα όμως με την εχθρότητα ή τη στενοκεφαλιά αυτού του κοινωνικού περιγύρου;

Οι μεγάλοι μαθηματικοί έχουν παίξει έναν ρόλο στην εξέλιξη των επιστημών, συγκρίσιμο με εκείνον που έπαιξαν οι φιλόσοφοι και οι φυσικοί επιστήμονες. Ωστόσο, οι βασικές ιδέες με τις οποίες έχουν υφανθεί τα μαθηματικά είναι απλές, όμορφες και μέσα στα πλαίσια κατανόησης κάθε ανθρώπου που διαθέτει μια μέση νοημοσύνη. Σε αυτήν την εφημερίδα που εκδίδουν οι μαθητές του **Μουσικού Σχολείου Πρέβεζας**, ο αναγνώστης μπορεί να αποκτήσει γνώσεις πολύτιμες, αλλά και μια εμπειρία μοναδική για τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσονται οι επιστήμονες, με γνώμονα τη ζωή των δημιουργών τους.

*Κωνσταντίνος Φώτος*



## 14/3 : Παγκόσμια ημέρα του $\pi$



Ο αριθμός  $\pi$  (συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα  $\pi$ ) είναι μια μαθηματική σταθερά που ορίζεται ως ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο ενός κύκλου, και είναι με ακρίβεια οκτώ δεκαδικών ψηφίων ίσος με **3,14159265**. Εκφράζεται με το ελληνικό γράμμα  $\pi$  από τα μέσα του 18ου αιώνα. Ο  $\pi$  είναι ένας άρρητος αριθμός, που σημαίνει ότι δεν μπορεί να εκφραστεί ακριβώς ως λόγος δύο ακεραίων (όπως  $22/7$  ή άλλα κλάσματα που χρησιμοποιούνται συνήθως για την προσέγγιση του  $\pi$ ) κατά συνέπεια, η δεκαδική απεικόνιση δεν τελειώνει ποτέ και ποτέ δεν εγχαθίσταται σε μια μόνιμη και επαναλαμβανόμενη παράσταση. Ο  $\pi$  είναι ένας υπερβατικός αριθμός – δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα ενός μη-μηδενικού πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές.

14 Μαρτίου, είναι η παγκόσμια μέρα του  $\pi$ .

Η παγκόσμια ημέρα της σταθεράς  $\pi$  δεν απευθύνεται αποκλειστικά σε μαθηματικούς και γιορτάζεται κάθε χρόνο στις 14 Μαρτίου, εξαιτίας κάποιων αριθμητικών συμπτώσεων που συμβαίνουν την ημέρα αυτή. Στην Αμερική για παράδειγμα, η 14/3 γράφεται ως 3-14, δηλαδή η τιμή της σταθεράς ( $\pi=3,14$ ).

Ο εορτασμός της ημέρας του “ $\pi$ ” καθιερώθηκε το 1988 από τον Larry Shaw στο Φρανσίσκο. Γιορτάζεται, δε, με την ...κατανάλωση στρογγυλών πιτών επειδή στα αγγλικά το ελληνικό γράμμα  $\pi$  θυμίζει την αγγλική λέξη pie (πίτα) η οποία προφέρεται ως “πάι”.

Η μαγεία του  $\pi$  όμως δεν συγκινεί μόνον τους μαθηματικούς αλλά εκατοντάδες χιλιάδες απλούς ανθρώπους σε όλο τον κόσμο, που αντιλαμβάνονται το θέμα ως ένα από τα πιο δημοφιλή παράξενα στην ιστορία της σκέψης.

Μάλιστα, το 1998 ένας ανεξάρτητος Αμερικανός σκηνοθέτης, ο Ντάρνεν Αρονόφσκι, γύρισε μία από τις πιο παράξενες ταινίες του σινεμά το “ $\pi$ ”, όπου ο πρωταγωνιστής (ένας νεαρός μαθηματικός με εμμονή στην κρυπτογραφία) προσπαθεί μέσω του  $\pi$  να βρει τον παγκόσμιο αλγόριθμο που θα αποκάλυπτε οριστικά την κοσμική συμμετρία και θα έδινε έναν και μοναδικό τρόπο υπολογισμού συμμετριών, από το χρηματιστήριο, έως τον Θεό. Φυσικά το αποτέλεσμα τον οδηγεί στην τρέλα.

Η σημερινή ημερομηνία εμφανίζεται στο αμερικανικό ημερολόγιο ως 3/14 ή 3-14, τα οποία αντιστοιχούν στα δύο πρώτα ψηφία του αριθμού “ $\pi$ ”. Και αν θέλει κανείς να είναι ακόμα πιο ακριβής τότε στις 1:59 και 26 δευτερόλεπτα θα γιορτάζει το “ $\pi$ ” παράγοντας τα επτά πρώτα ψηφία του, ήτοι τον αριθμό 3,1415926. Μάλιστα, για την απομνημόνευση των πρώτων λίγων δεκαδικών ψηφίων του αριθμού  $\pi$  έχουν επινοηθεί διάφοροι μνημονικοί κανόνες, ανάμεσά τους και η παραπάνω φράση, με την οποία μπορεί να θυμάται κανείς τα πρώτα 23 δεκαδικά ψηφία του  $\pi$ .

*Ζήγος Ιωάννης*

## Ο μύθος του «είμαι κακός στα μαθηματικά»

“Δεν έχω μαθηματικό μυαλό”. Το ακούμε διαρκώς. Όμως αυτή η άποψη περί “μαθηματικών μυαλών” καταντάει να είναι αυτοκαταστροφική για όσους την ασπάζονται. Η πραγματικότητα είναι ότι μάλλον έχετε “μαθηματικό μυαλό”, όμως αν έχετε διαφορετική άποψη ίσως βλέπτετε τη καριέρα σας. Αλλά το χειρότερο είναι ότι συμβάλετε στη διαίωση ενός μύθου που βλέπει ολέθρια τα μη προνομιούχα παιδιά, το μύθο της έμφυτης γενετικής ικανότητας στα μαθηματικά.

Είναι έμφυτη η ικανότητα στα μαθηματικά; Σίγουρα σε κάποιο βαθμό είναι. Ο Terence Tao, διάσημος μαθηματικός του UCLA, δημοσιεύει δεκάδες άρθρα σε κορυφαία περιοδικά κάθε χρόνο. Ερευνητές απ’ όλο τον κόσμο ζητούν τη βοήθεια του για τα δυσκολότερα κομμάτια της έρευνας τους. Κανένας από εμάς δεν θα μπορούσε ποτέ να είναι τόσο καλός στα μαθηματικά όπως ο Terence Tao, ανεξαρτήτως πόσο σκληρά προσπαθήσουμε ή πόσο καλούς δασκάλους έχουμε. Αλλά εδώ είναι η διαφορά: Εμείς δεν χρειάζεται να είμαστε τόσο καλοί! Για τα μαθηματικά του σχολείου, το εκ γενετής ταλέντο είναι πολύ λιγότερο σημαντικό από τη σκληρή δουλειά, την προετοιμασία και την αυτοπεποίθηση.

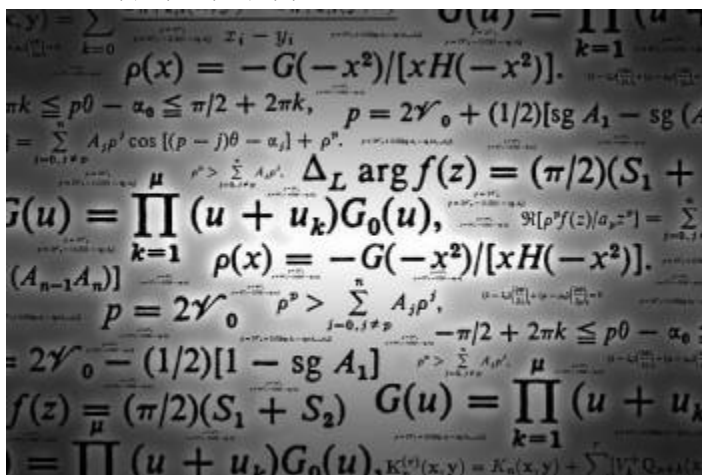
Πώς το ξέρουμε αυτό; Όσοι διδάσκουν μαθηματικά για πολλά χρόνια – καθηγητές, βοηθοί διδασκαλίας και εκπαιδευτικοί του ιδιωτικού τομέα – παρατηρούν να επαναλαμβάνεται το παρακάτω μοτίβο :

Διαφορετικά παιδιά με διαφορετικά επίπεδα της προετοιμασίας ξεκινούν σε μια τάξη μαθηματικών. Μερικά από αυτά τα παιδιά έχουν γονείς που τα έχουν βοηθήσει να εντρυφήσουν στα μαθηματικά από μικρή ηλικία, ενώ άλλα παιδιά δεν είχαν αυτή τη γονική βοήθεια.

Στα πρώτα τέστ, τα καλά προετοιμασμένα παιδιά παίρνουν πολύ καλά αποτελέσματα, ενώ τα απροετοίμαστα παιδιά παίρνουν ό, τι κατάφεραν να μάθουν από μόνα τους.

Τα απροετοίμαστα παιδιά, δεν συνειδητοποιούν ότι αυτοί που πήραν τους καλούς βαθμούς ήταν καλά προετοιμασμένοι, και υποθέτουν ότι η εκ γενετής ικανότητα καθόρισε την διαφορά στην απόδοση τους. Έχοντας αποδεχτεί ότι “δεν έχουν μαθηματικά μυαλό”, δεν προσπαθούν σκληρά και στις επόμενες τάξεις, και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μείνουν πίσω.

Τα καλά προετοιμασμένα παιδιά, δεν συνειδητοποιούν ότι οι μαθητές που δεν πήραν καλούς βαθμούς ήταν απλώς απροετοίμαστοι, υποθέτουν ότι έχουν “μαθηματικό μυαλό”, και μελετούν πολύ και στο μέλλον ώστε να επιβεβαιώσουν το πλεονέκτημα τους. Έτσι, η πίστη των ανθρώπων ότι η ικανότητα στα μαθηματικά δεν μπορεί να αλλάξει γίνεται μια αυτοεμπληρούμενη προφητεία.



Η άποψη ότι η ικανότητα στα μαθηματικά είναι κυρίως έμφυτη αποτελεί μια σκοτεινή πτυχή της μεγαλύτερης πλάνης ότι η νοημοσύνη είναι κυρίως έμφυτη. Τα ακαδημαϊκά περιοδικά ψυχολογίας είναι γεμάτα δημοσιεύσεις που μελετούν την άποψη που βρίσκεται πίσω από το είδος της αυτοεμπληρούμενης προφητείας που μόλις περιγράψαμε.

Για παράδειγμα, η καθηγήτρια ψυχολόγος Patricia Linehan του πανεπιστημίου Purdue γράφει :

Οι μελέτες σχετικά με το πως αντιλαμβανόμαστε την ικανότητα, έχουν δείξει δύο διαφορετικούς τύπου προσανατολισμού. Οι μαθητές με τον πρώτο τύπο (Incremental orientation), πιστεύουν ότι η ικανότητα (νοημοσύνη) είναι εύπλαστη, με

αποτέλεσμα να καταβάλουν μεγαλύτερη προσπάθεια. Οι μαθητές με τον δεύτερο τύπο προσανατολισμού (Entity orientation) πιστεύουν ότι η ικανότητα τους δεν είναι εύπλαστη, κάτι που τους αποτρέπει να προσπαθήσουν περισσότερο.

Η άποψη που λέει. “Είτε είστε έξυπνος είτε όχι, τελεία και παύλα» οδηγεί σε κακά αποτελέσματα. Αυτό έχει επιβεβαιωθεί και από πολλές άλλες μελέτες. Όσο αφορά τα μαθηματικά αποδείχτηκε πρόσφατα και από τους ερευνητές στο Oklahoma City που βρήκαν σε μελέτη που έκαναν, ότι η πίστη στην έμφυτη ικανότητα στα μαθηματικά μπορεί να είναι η αιτία για σημαντικό μέρος της του χάσματος μεταξύ των δύο φύλων στα μαθηματικά .

Σε άλλη έρευνα, οι ψυχολόγοι Lisa Blackwell , Kali Trzesniewski και Carol Dweck παρουσίασαν σε φοιτητές τις δύο παρακάτω εναλλακτικές πεποιθήσεις των ανθρώπων σχετικά με την ευφυΐα :

Έχετε συγκεκριμένη ποσότητα νοημοσύνης, και δεν μπορείτε να κάνετε πολλά για να την αλλάξετε.

Μπορείτε να επηρεάσετε σε μεγάλο βαθμό το πόσο έξυπνοι είστε.

Διαπίστωσαν ότι οι φοιτητές οι οποίοι συμφώνησαν ότι «μπορείτε να επηρεάσετε σε μεγάλο βαθμό το πόσο έξυπνοι είστε » πήραν υψηλότερους βαθμούς. Αλλά, όπως ο Richard Nisbett αφηγείται στο βιβλίο *Intelligence and How to Get It* , οι ερευνητές έκαναν κάτι ακόμα πιο αξιοπρόσεκτο:

Προσπάθησαν να πείσουν μια ομάδα μαθητών γυμνασίου και λυκείου που προέρχονταν από μία φτωχή μειονότητα, ότι η νοημοσύνη είναι εξαιρετικά εύπλαστη και μπορεί να αναπτυχθεί με τη σκληρή δουλειά ... ότι η μάθηση αλλάζει τον εγκέφαλο δημιουργώντας νέες νευρωνικές συνάψεις ... και ότι οι μαθητές είναι υπεύθυνοι για αυτή τη διαδικασία αλλαγής. Τα αποτελέσματα; Οι μαθητές που πείστηκαν ότι θα μπορούσαν να γίνουν πιο έξυπνοι με τη σκληρή δουλειά, εργάστηκαν σκληρότερα και πέτυχαν υψηλότερη βαθμολογία. Απ’ αυτούς τους μαθητές, ακόμα καλύτερο αποτέλεσμα πέτυχαν όσοι πίστευαν αρχικά ότι η ευφυΐα είναι έμφυτη.

Αλλά η βελτίωση των βαθμών δεν ήταν η πιο εντυπωσιακή επίδραση. Ο Dweck αναφέρει ότι ορισμένοι μαθητές ξέσπασαν σε δάκρυα ακούγοντας ότι η νοημοσύνη τους είναι ουσιαστικά υπό τον έλεγχό τους. “Δεν είναι εύκολο να περάσεις μια ζωή πιστεύοντας ότι γεννήθηκες χαζός και είσαι καταδικασμένοι να παραμείνεις έτσι.”

Για όσους πιστεύουν ότι έχουν γεννηθεί χαζοί και είναι καταδικασμένοι να μείνουν έτσι – αυτό το πιστεύω είναι ψέμα. Το IQ μπορεί να βελτιωθεί με τη σκληρή δουλειά.

Σκαμνέλου Χριστίνα

## Stephen Hawking – Τι είναι μία επιστημονική θεωρία;



Ο Στίβεν Χόκινγκ γεννήθηκε στις 8 Ιανουαρίου 1942.

Για να μιλήσει κανείς για τη φύση του Σύμπαντος και να εξετάσει ερωτήματα όπως το αν υπήρξε μια αρχή ή αν θα υπάρξει ένα τέλος, είναι απαραίτητο να διασαφηνίσει πρώτα τι είναι μία επιστημονική θεωρία.

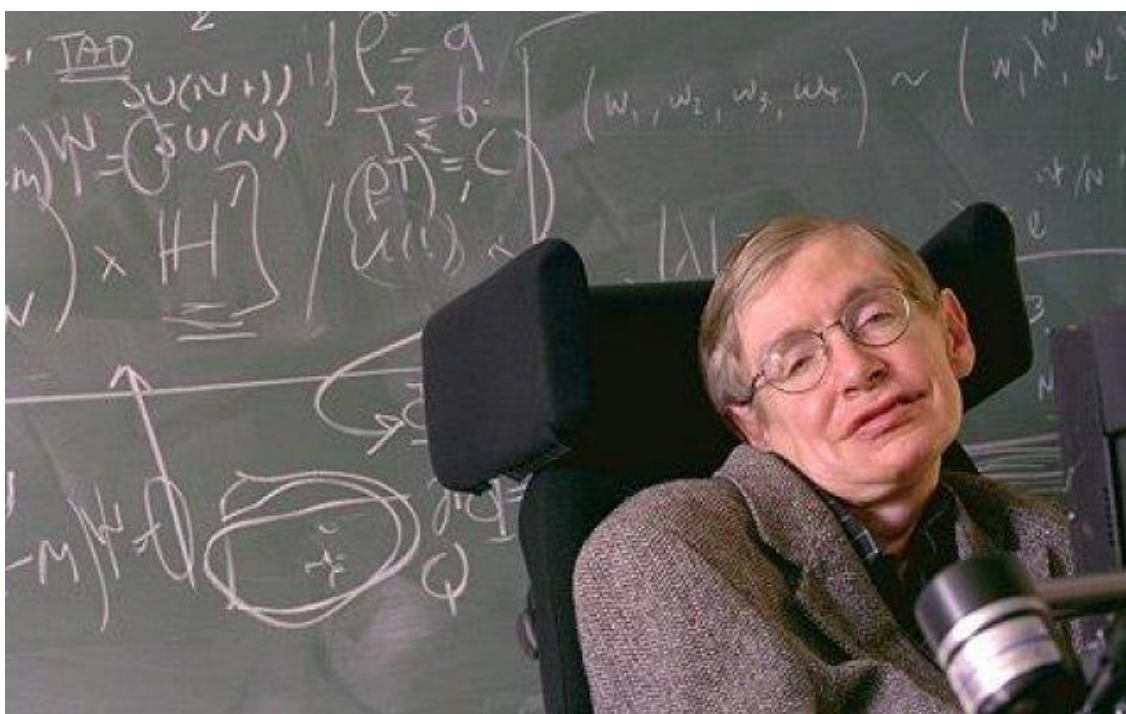
Θα εξετάσουμε την αριετά απλή και διαδομένη άποψη ότι μία θεωρία είναι ακριβώς ένα μοντέλο για το Σύμπαν (ή για κάποιο τμήμα του Σύμπαντος), μαζί με ένα σύνολο κανόνων που συσχετίζουν τις θεωρητικές ποσότητες αυτού του μοντέλου με τα δεδομένα των παρατηρήσεων. Κάθε θεωρία υπάρχει μέσα στο μυαλό μας και μόνο· δεν έχει καμία άλλη «πραγματική» ύπαρξη.

**Για να είναι καλή πρέπει να ικανοποιεί**

**δύο απαιτήσεις:** να περιγράφει με ακρίβεια ένα μεγάλο σύνολο παρατηρήσεων, χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο που να περιέχει λίγα αυθαίρετα στοιχεία· επίσης, να προτείνει συγκεκριμένες προβλέψεις για τα αποτελέσματα μελλοντικών παρατηρήσεων.

Για παράδειγμα, η θεωρία του Αριστοτέλη ότι όλα τα πράγματα αποτελούνται από τέσσερα στοιχεία, τη γη, τον αέρα, τη φωτιά και το νερό, αν και απλή από την άποψη των αυθαίρετων στοιχείων που περιέχει, δεν προτείνει κάποιες συγκεκριμένες προβλέψεις.

Η θεωρία του Νεύτωνα βασίζεται σε ένα απλούστερο μοντέλο: τα σώματα έλκονται με δύναμη ανάλογη μίας ποσότητας τους που ονομάζεται μάζα και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης. Αν και η εν λόγω θεωρία περιέχει λίγα μόνο αυθαίρετα στοιχεία, προβλέπει με μεγάλη ακρίβεια τις κινήσεις του Ήλιου, της Σελήνης και των πλανητών.



Κάθε φυσική θεωρία είναι πάντα μία υπόθεση προσωρινή, με την έννοια ότι δεν μπορούμε ποτέ να αποδείξουμε οριστικά πως είναι σωστή. Όσες φορές και αν συμφωνήσουν τα αποτελέσματα των πειραμάτων με τις προβλέψεις της, ποτέ δεν μπορούμε να είμαστε απολύτως βέβαιοι ότι την επόμενη φορά το νέο αποτέλεσμα θα συνεχίσει να συμφωνεί μαζί της. Αντίθετα, για να αποδείξουμε ότι μια θεωρία δεν είναι σωστή αρκεί μία και μόνο φορά ένα και μόνον αποτέλεσμα να μη συμφωνεί με τις προβλέψεις της.

Όπως τόνισε ο φιλόσοφος της επιστήμης Karl Popper, μια καλή θεωρία χαρακτηρίζεται από το ότι προτείνει έναν αριθμό προβλέψεων που μπορεί κάποτε να μη συμφωνήσουν με τα αποτελέσματα των πειραμάτων δηλαδή, μία καλή θεωρία είναι μία θεωρία διαψεύσιμη.

Κάθε φορά που γίνονται νέα πειράματα και βρίσκεται ότι συμφωνούν με τις προβλέψεις της, η θεωρία επιβιώνει και η εμπιστοσύνη μας σε αυτήν παραμένει· αν όμως κάποτε γίνει ένα νέο πείραμα που δεν συμφωνεί με τις προβλέψεις, είμαστε υποχρεωμένοι ή να εγκαταλείψουμε τη θεωρία ή να την τροποποιήσουμε ανάλογα. Έτσι τουλάχιστον υποτίθεται ότι συμβαίνει· γιατί βέβαια μπορεί κανείς να αμφισβητήσει την αξιοπιστία κάποιου πειράματος και να την αποδώσει σε αθέμιτο επιστημονικό ανταγωνισμό.

Στην πραγματικότητα, αυτό που συνήθως συμβαίνει είναι ότι δημιουργείται μια νέα θεωρία που περιέχει την προηγούμενη αλλά συμφωνεί και με τα αποτελέσματα των νέων πειραμάτων ή τα δεδομένα των νέων παρατηρήσεων.

Ας πάρουμε για παράδειγμα τη θεωρία του Νεύτωνα για τη βαρύτητα. Κάποιες ακριβέστερες παρατηρήσεις του πλανήτη Ερμή αποκάλυψαν μια μικρή ασυμφωνία της κίνησης του με τις προβλέψεις της νευτώνειας θεωρίας. Η γενική θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν προέβλεπε μία κίνηση λίγο διαφορετική από τη θεωρία του Νεύτωνα. Το γεγονός ότι οι προβλέψεις του Αϊνστάιν συμφωνούσαν με τις νέες παρατηρήσεις, ενώ του Νεύτωνα όχι, συνέβαλε αποφασιστικά στην επιβεβαίωση της νέας θεωρίας.

Εντούτοις χρησιμοποιούμε ακόμη τη θεωρία του Νεύτωνα επειδή στις καταστάσεις που συνήθως αντιμετωπίζουμε, η διαφορά των προβλέψεων της από τις προβλέψεις της γενικής θεωρίας της σχετικότητας είναι πολύ μικρή. (Η θεωρία του Νεύτωνα έχει επίσης το μεγάλο πλεονέκτημα ότι είναι πολύ πιο εύχρηστη από τη θεωρία του Αϊνστάιν!)



Ο μεγαλύτερος εχθρός της γνώσης δεν είναι η άγνοια.. Αλλά η ψευδαισθήση της γνώσης.. Στίβεν Χόκινγκ

Hawking Stephen –  
Το χρονικό του χρόνου

Επιμελήθηκαν οι μαθήτριες Φιρή Χριστίνα & Τέφα Ελένη

Εκεί που έχεις φτάσει στο 0 και νομίζεις ότι είσαι στον πάτο, τσουπ, εμφανίζεται ο μαθηματικός και σου λέει "υπάρχουν και αρνητικοί αριθμοί"

## Από τη Γη στη Σελήνη

Το *Από τη Γη στη Σελήνη* (τίτλος πρωτοτύπου *De la Terre à la Lune*), είναι ένα μυθιστόρημα επιστημονικής φαντασίας του Γάλλου θεμελιωτή του είδους Ιουλίου Βερν, ένα από τα πρώτα του έργα. Δημοσιεύθηκε το έτος 1865. Διηγείται, με φαντασία και χιούμορ, την ιστορία του προέδρου ενός συλλόγου βετεράνων του Αμερικανικού Εμφύλιου, του Μπάρμπικιέν, ο οποίος αποφασίζει να κατασκευάσει ένα τεράστιο κανόνι, την «Κολομπιάδα», και να εκτοξεύσει με αυτό ένα βλήμα ως τη Σελήνη. Μετά την παρέμβαση ενός τολμηρού Γάλλου, του Μισέλ Αρντάν, στο τέλος του μυθιστορήματος εκτοξεύονται μέσα στο βλήμα και τρεις άνθρωποι: ο Μπάρμπικιέν, ο Αρντάν και ο πλοίαρχος Νικόλ.



Το μυθιστόρημα είναι αξιοσημείωτο ως προς το ότι ο Βερν επιχείρησε ορισμένους προσεγγιστικούς υπολογισμούς σχετικά με τις προδιαγραφές του κανονιού και, με δεδομένη την έλλειψη στοιχείων πάνω στο θέμα κατά την εποχή του, μερικοί από τους αριθμούς που δίνει είναι εκπληκτικά κοντά στην πραγματικότητα. Το εγχείρημα είναι σι' αλήθεια δυνατό για μη επανδρωμένη πτήση, αλλά μη πρακτικό για επανδρωμένο βλήμα, αφού το μήκος του κανονιού θα πρέπει να ήταν χιλιόμετρα για την επίτευξη της ταχύτητας διαφυγής με περιορισμένη επιτάχυνση ώστε να μπορούν να επιβιώσουν οι επιβάτες.

### Περίληψη της πλοκής

Κάποια χρόνια μετά το τέλος του Εμφυλίου, ο «Τηλεβολικός Σύλλογος» της Βαλτιμόρης, τα μέλη του οποίου αισθάνονται ανία από την απραξία τους σε εποχή ειρήνης, έχει μία συνέλευση κατά την οποία ο Ίμπεϋ Μπάρμπικιέν, ο πρόεδρος του, καλεί τα μέλη να υποστηρίξουν την ιδέα του: Σύμφωνα με τους υπολογισμούς του, ένα μεγάλο τηλεβόλο (κανόνι) μπορεί να εκτοξεύσει ένα βλήμα με τόση δύναμη ώστε αυτό να φθάσει στη Σελήνη. Μετά την ομόθυμη υποστήριξη των μελών του συλλόγου, κάποιοι από αυτούς συναντιούνται και πάλι για να αποφασίσουν για τα επιμέρους θέματα: από πού πρέπει να εκτοξευθεί το βλήμα, τις διαστάσεις και τα υλικά κατασκευής του τηλεβόλου και του βλήματος και την ποσότητα της εκρηκτικής ύλης.

Και ενώ όλος ο πληθυσμός είναι ενθουσιασμένος με την ιδέα, ένας παλιός αντίπαλος του Μπάρμπικιέν στον πόλεμο, ο πλοίαρχος Νικόλ από τη Φιλαδέλφεια, σχεδιαστής και κατασκευαστής χαλύβδινων θωρακίσεων που προσπαθούσε να τρυπήσει με τα βλήματα των κανονιών του ο Μπάρμπικιέν, άρχισε να κατηγορεί δημόσια το εγχείρημα ως αδύνατο να πραγματοποιηθεί και βάζει μια σειρά στοιχημάτων εναντίον του:

Το πρώτο ζήτημα, η συγκέντρωση των χρημάτων, λύνεται με τη διεξαγωγή εράνων στις περισσότερες χώρες της Ευρώπης και της Αμερικής με ποικίλα αποτελέσματα (αν και από τις ΗΠΑ μόνο συλλέγονται τα 4 από τα 5,4 εκατομμύρια δολάρια της εποχής που συγκεντρώθηκαν συνολικά, ενώ η Μεγάλη Βρετανία δεν δίνει τίποτα).

Μετά την επιλογή του τόπου για την εκτόξευση (ο «Πέτρινος Λόφος» στην Τάμπα-Γάουν της Φλόριντα), το προεδρείο του Τηλεβολικού Συλλόγου επισκέπτεται την περιοχή και αμέσως αρχίζει η κατασκευή του κανονιού, της «Κολομπιάδας», με την εσκαφή μιας κυλινδρικής οπής βάθους 300 μέτρων και διαμέτρου 18 υπό την επίβλεψη του μηχανικού Μέρττισον του Τηλεβολικού, η οποία γίνεται σε χρόνο-ρεκόρ, καθώς πρέπει η εκτόξευση να γίνει κατά το περίγειο της Σελήνης, την 1η Δεκεμβρίου. Αλλά μια έκπληξη περιμένει τον Μπάρμπικιέν: Ο Μισέλ Αρντάν, ένας Γάλλος γνωστός για τα παράτολμα εγχειρήματά του, του στέλνει ένα τηλεγράφημα στις 30 Σεπτεμβρίου με το οποίο του ζητά να αντικαταστήσει το σφαιρικό βλήμα με μεγαλύτερη κυλινδροκωνική οβίδα ώστε να μπει μέσα και να ταξιδέψει στη Σελήνη!

Σε μία συνάντηση του Αρντάν με τα μέλη του Συλλόγου στο ύπαιθρο και μπροστά σε χιλιάδες κόσμου, ο Νικόλ εμφανίζεται, αντιδικεί με πάθος μαζί του και στο τέλος βρίζει τον Μπάρμπικιέν, με τον οποίο αργότερα κανονίζουν να μονομαχήσουν. Τη μονομαχία αυτή αποτρέπει ο Αρντάν, ειδοποιημένος εγκαίρως από τον γραμματέα του Τηλεβολικού Συλλόγου Τζων Τ. Μάστον και τους προτείνει να ταξιδέψουν μαζί του μέσα στην οβίδα, πρόταση που γίνεται δεκτή.

Στο τέλος του μυθιστορήματος το βλήμα εκτοξεύεται με επιτυχία, αλλά η μοίρα των τριών πρωτοπόρων αστροναυτών αφήνεται αδιευκρίνιστη. Η συνέχεια της ιστορίας περιγράφεται στο επόμενο μυθιστόρημα, το *Γύρω από τη Σελήνη*, που αφηγείται το τι συμβαίνει στους τρεις τους κατά το ταξίδι τους.

**Είναι πραγματοποιήσιμο τεχνικά ένα «διαστημικό κανόνι»;**

Στο έργο του (1903) για τα διαστημικά ταξίδια ο Ρώσος πρωτοπόρος της αστροναυτικής Κωνσταντίν Τσιολκόφσκι αντιτάχθηκε στην ιδέα του Βερν για τη χρήση κανονιού για διαστημικά ταξίδια. Συμπέρανε πως ένα τέτοιο κανόνι θα έπρεπε να ήταν απίστευτα μακρύ. Το τηλεβόλο στο *Από τη Γη στη Σελήνη* θα υπέβαλλε το φορτίο του βλήματος σε επιτάχυνση περίπου 22.000 τζι.

Ο Τζέραλντ Μπουλ και το Πρόγραμμα HARP απέδειξαν μετά το 1961 ότι ένα κανόνι μπορεί να εκτοξεύσει ένα βλήμα 180 κιλών σε ύψος 180 km και να το επιταχύνει μέχρι το 32% της ταχύτητας διαφυγής. Κατά τη σειρά πυρηνικών δοκιμών *Επιχείρηση Plumbbob*, μία ατσάλινη πλάκα βάρους 900 κιλών εκτινάχθηκε και δεν ξαναβρέθηκε ποτέ: έχει διατυπωθεί η άποψη ότι διέφυγε στο διάστημα, επειδή η ταχύτητά της εκτιμήθηκε σε διπλάσια ως εξαπλάσια της ταχύτητας διαφυγής, αλλά οι μηχανικοί πιστεύουν ότι έλιωσε μέσα στην ατμόσφαιρα της Γης.

**Κριτική των επιστημονικών και τεχνικών στοιχείων**

Η αστρονομία στο έργο του Ιουλίου Βερν εκπροσωπείται από αμφότερα τα *Από τη Γη στη Σελήνη* και *Γύρω από τη Σελήνη*, το *Πάνω σ' έναν κομήτη* (Hector Servadas, 1877), καθώς και από το ύστερο μυθιστόρημα *Το κωνίγι του αερολίθου* (α' έκδοση μεταθανάτια, 1908). Βέβαια γίνεται λόγος κυρίως για τα πορίσματα της «κλασικής» Αστρονομίας του 19ου αιώνα, η οποία επικεντρωνόταν στη μελέτη των θέσεων και των τροχιών, και όχι τόσο στην Αστροφυσική, η οποία αναπτύσσεται μόλις στα τέλη του αιώνα. Ο αρχικός τίτλος του *Από τη Γη στη Σελήνη* ήταν άκρως τεχνικός για την εποχή του: «**Ευθεία τροχιά σε 97 ώρες 20 λεπτά**». Ο εκδότης του Βερν, ο Hetzel τον μετέτρεψε στο «*Από τη Γη στη Σελήνη*», αν και σήμερα θα επιλεγόταν μάλλον ο αρχικός τίτλος για ένα έργο επιστημονικής φαντασίας — αυτός διατηρήθηκε μόνο στη ρωσική μετάφραση του έργου.

Το μεγαλύτερο μέρος της διεθνούς φήμης του Βερν έγκειται στις προβλέψεις του για το μέλλον, που είχαν αρχίσει να επαληθεύονται όσο ακόμα ζούσε ο ίδιος και του εξασφάλισαν το χαρακτηρισμό «προφήτης». Οι προρρήσεις αυτές αναφέρονται στα τεχνολογικά επιτεύγματα της ανθρωπότητας, όχι στις προόδους των θεωρητικών κλάδων των διαφόρων θετικών επιστημών. Ο Βερν συνδέει πάντως στενά τα επιτεύγματα της τεχνικής με την Εφαρμοσμένη Επιστήμη, κάτι που αποτελεί τον κανόνα και θεωρείται σχεδόν αυτονόητο στην εποχή μας, αλλά όχι και τον 19ο αιώνα. Το πλέον εντυπωσιακό παράδειγμα πολλών ορθών επί μέρους προβλέψεων για ένα θέμα βρίσκεται στα *Από τη Γη στη Σελήνη* και *Γύρω από τη Σελήνη*. Εκεί ο Ιούλιος Βερν όχι μόνο προβλέπει ορθά ότι η πρώτη εκτόξευση ανθρώπων προς τη Σελήνη θα λάβει χώρα στη Φλόριντα των ΗΠΑ, όχι μόνο προβλέπει τον ακριβή αριθμό των αστροναυτών στη σεληνάκτο (τρεις) και με μεγάλη προσέγγιση τις διαστάσεις και το βάρος της σεληνακάτου, αλλά και την επιστροφή με προσθαλάσσωση στον Ειρηνικό Ωκεανό - στην περίπτωση του «Απόλλων 8» και την περιοχή του Ειρηνικού με σφάλμα 4 μόλις χιλιόμετρα! Εντυπωσιασμένος, ο αστροναύτης Φρανκ Μπόρμαν του «Απόλλων 8», αποστολής που οδήγησε για πρώτη φορά τον άνθρωπο «προς» τη Σελήνη και σε περιφορά «γύρω από τη Σελήνη» (Δεκέμβριος 1968), θα γράψει ένα γράμμα στο δισέγγονο του συγγραφέα, τον Jean-Jules Verne, με ημερομηνία 5 Φεβρουαρίου 1969, όπου μεταξύ άλλων αναφέρει:

*«είναι περισσότερο από μια απλή σύμπτωση: είναι φόρος τιμής στην ιδιοφυΐα των οραματισμών του. Δεν φαντάστηκε απλώς τι είδους άθλοι ήταν κατορθωτοί από τον άνθρωπο, αλλά και το πώς ακριβώς θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν, μέχρι και τις μικρότερες λεπτομέρειες. Ποιος μπορεί να πει πόσοι διαστημικοί επιστήμονες εμπνεύσθηκαν, συνειδητά ή υποσυνείδητα, από την ανάγνωση των έργων του Ιουλίου Βερν; [...] ...πίσω από κάθε αποφασιστικό βήμα στην ανθρώπινη ιστορία βρίσκεται ένα όνειρο. Αυτό το όνειρο [αλλά] και τα σχέδια για την πραγματοποίησή του υποδείχθηκαν σε μας για πρώτη φορά από τον πρόγονό σας. ...επομένως ο Ιούλιος Βερν αποτελεί έναν από τους μεγάλους πρωτοπόρους της διαστημικής εποχής».*

Αντιτάχθηκε η άποψη ότι η εκτόξευση με γιγαντιαίο πυροβόλο θα σκότωνε όπως αποδεικνύεται τους ήρωες του Βερν. Αλλά το αρχικό σχέδιο των πρωταγωνιστών στο *Από τη Γη στη Σελήνη* είναι ένα μη επανδρωμένο βλήμα. Στο επίπεδο αυτό, η εκτόξευση στο διάστημα με κανόνι όχι μόνο είναι δυνατή, αλλά θα γίνει ίσως πραγματικότητα: Το πρόγραμμα SHARP (Super High Altitude Research Project) στο Εθνικό Εργαστήριο Lawrence στο Livermore της Καλιφόρνια προβλέπει τη χρήση ενός «υπερπυροβόλου» για τη θέση τεχνητών δορυφόρων σε τροχιά με πολύ μικρότερο κόστος<sup>[4]</sup>. Η έμπνευση αυτή του φυσικού Τζων Χάντερ θα δίνει στο βλήμα αρχική ταχύτητα 7 km/sec, και ήδη ονομάστηκε «Jules Verne Launcher».

Οι καταπληκτικές προβλέψεις του Βερν οφείλονται κατά μεγάλο μέρος στη συστηματική μελέτη των επιστημονικών και των γενικότερων δεδομένων για κάθε περίπτωση. Διείδε τις δυνατότητες των ΗΠΑ για μελλοντική ανάπτυξη και γνώριζε ότι τα σημεία της Γης κοντύτερα στον ισημερινό, όπου η λίγο μικρότερη βαρύτητα και η γήινη περιστροφή υποβοηθούν, είναι τα καταλληλότερα για εκτοξεύσεις. Το νοτιότερο σημείο των ηπειρωτικών ΗΠΑ βρίσκεται στη Φλόριντα.



Ως προς τις ομοιότητες με το διαστημικό πρόγραμμα «Απόλλων» της NASA, ακόμα και το κόστος του προγράμματος στο βιβλίο (12,1 δισεκ. σε δολάρια του 1969) είναι παρόμοιο με το συνολικό κόστος του προγράμματος «Απόλλων» μέχρι και το «Απόλλων 8» (\$14,4 δισεκ. σε δολάρια του 1969). Επίσης, όλα τα σκάφη του προγράμματος ανασύρθηκαν από τον ωκεανό από πλοία του αμερικανικού πολεμικού ναυτικού. Ακόμα, ο Βερν ήταν πρωτοπόρος ως προς την κατασκευή του βλήματος από αλουμίνιο αντί χάλυβα (όπως θα ήταν το αναμενόμενο για την εποχή του), καθώς το αλουμίνιο είναι ελαφρότερο. Η σεληνάκατος *Columbia* του «Απόλλων» ήταν κατασκευασμένη κυρίως από κράματα αλουμινίου.

### Η έμπνευση για τον χαρακτήρα του Αρντάν

Ο γενναιότερος από τους ήρωες του έργου, ο Μισέλ Αρντάν, οφείλει το όνομά του στον αναγραμματισμό του ονόματος του συγγραφέα, πρωτοπόρου φωτογράφου και ερασιτέχνη αεροναύτη Nadar (ψευδώνυμο του Φελίξ Τουρνασόν, 1820-1910), που επεχείρησε ένα ταξίδι στην Αφρική με το αερόστατο «Γίγας». Η γνωριμία του Βερν με τον Ναντάρ έδωσε την αφορμή για τη συγγραφή του *Πέντε εβδομάδες με αερόστατο* (βλ.λ.). Ο Ναντάρ παρέμεινε ισόβιος φίλος και σύμβουλος επί τεχνικών θεμάτων του Βερν.

### Επιδράσεις του μυθιστορήματος

Το μυθιστόρημα *Από τη Γη στη Σελήνη* διασκευάστηκε στην οπερέτα *Le voyage dans la lune* το 1875, σε μουσική Ζακ Όφενμπαχ.

Στο μυθιστόρημα με αντίστοιχο θέμα του Χέρμπερτ Τζωρτζ Γουέλς *The First Men in the Moon* (1901) ο ήρωας, ο κ. Μπέντφορντ, αναφέρει το μυθιστόρημα του Βερν στον συνταξιδιώτη του καθηγητή Σαντο, ο οποίος του απαντά ότι το αγνοεί. Ο Βερν θα απαντήσει στην «πρόκληση»:

«...οι ιστορίες του (Γουέλς) δεν εδράζονται σε πολύ επιστημονικές βάσεις... Εγώ κάνω χρήση της φουσιικής. Εκείνος επινοεί.» δηλώνει ο Βερν. «Πηγαίνω στη Σελήνη με βλήμα κανονιού. Καμία επινόηση. Εκείνος πηγαίνει... ...με σκάφος που κατασκευάζει από υλικό που καταργεί το νόμο της βαρύτητας. Αυτό είναι πολύ όμορφο, αλλά δείξτε μου αυτό το μέταλλο. Ας το παραγάγει».

Δώδεκα χρόνια αργότερα η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας δικαιώνει τα λόγια αυτά του Βερν κατά απόλυτο τρόπο: η βαρύτητα έχει σχέση με τον ίδιο το χωρόχρονο, είναι τόσο γενική ώστε κανένα υλικό παρασκευαζόμενο με χημικές μεθόδους δεν μπορεί να είναι αδιαφανές στη βαρυτική ακτινοβολία.

Τα δύο έργα (του Βερν και του Γουέλς) ενέπνευσαν την πρώτη κινηματογραφική ταινία επιστημονικής φαντασίας, το *Ταξίδι στη Σελήνη* του Ζωρζ Μελιέ (1902). Το 1958 μία άλλη μεταφορά στον κινηματογράφο θα «γυριστεί», το *Από τη Γη στη Σελήνη*. Η υπόθεση του μυθιστορήματος υπήρξε επίσης η βάση για την πολύ ελεύθερη διασκευή *Jules Verne's Rocket to the Moon* (1967), μια αγγλική κωμωδία με τους Μπερλ Άιβς και Τέρρυ-Τόμας. Η τσεχοσλοβακική ταινία του 1961 *Ο θρυλικός Βαρόνος Μυγχάουζεν* συνδυάζει χαρακτήρες και στοιχεία της πλοκής από το έργο του Βερν με αυτά των ιστοριών του Βαρόνου Μυγχάουζεν και του Συρανό ντε Μπερζεράκι.

Το 1889 ο ίδιος ο Βερν έγραψε μία «συνέχεια» στα *Από τη Γη στη Σελήνη* και *Γύρω από τη Σελήνη*, το *Άνω κάτω*, με τα μέλη του Τηλεβολικού Συλλόγου (υπό τον Τζων Μάστον) να σχεδιάζουν ένα ακόμα μεγαλύτερο κανόνι για να μεταβάλλουν την κλίση του γήινου άξονα ώστε να καταστήσουν προσιτά στην εκμετάλλευση τα κοιτάσματα ορυκτών καυσίμων της Αρκτικής.

Ο Μπάριμπικέν εμφανίζεται στο μυθιστόρημα του Κέβιν Τζ. Άντερσον *Captain Nemo: The Fantastic History of a Dark Genius* ως... αξιωματικός της Οθωμανικής Αυτοκρατορίας του οποίου ο κύριος αντίπαλος, ο Ροβήρος ο Κατακτητής, σχεδιάζει διάφορα πρωτότυπα όπλα για να τον πολεμήσει, μεταξύ των οποίων μία απόπειρα για την εκτόξευση μιας αποστολής τριων ανθρώπων στη Σελήνη.

Κατά το ταξίδι της επιστροφής τους από τη Σελήνη τα μέλη του πληρώματος του «Απόλλων 11» αναφέρθηκαν στο έργο του Βερν σε μία τηλεοπτική μετάδοση στις 23 Ιουλίου 1969.

### Πηγές

- Μανιμάνης, Βασίλειος Ν. : «Ο Ιούλιος Βερν και η εισαγωγή της Επιστήμης στη λογοτεχνία», *Περισκόπιο της Επιστήμης*, τεύχος 217, Μάιος 1998, σ. 20 κ.ε.
- Taves, Brian & Michaluk, Stephen: *The Jules Verne Encyclopedia*, Scarecrow Press (1996)

Επιμελήθηκαν οι μαθητές Γιώργος & Ευρώπη Ηλιοπούλου, Πατσιάς Αναστάσιος

## Ρενέ Ντεκάρτ: Μαθηματικός, φιλόσοφος, διανοητής

Ο Ρενέ Ντεκάρτ (René Descartes) γεννήθηκε στις 31 Μαρτίου του 1596 στη Γαλλία. Αν και ολοκλήρωσε τις σπουδές του στη νομική, ικανοποιώντας την επιθυμία του πατέρα του, ωστόσο δεν ασχολήθηκε ποτέ επαγγελματικά. Ο ίδιος επιθυμούσε να γνωρίσει τον κόσμο και να «κατακτήσει» την αλήθεια και αυτή την αλήθεια αναζήτησε μέσα από το έργο του.



Ωστόσο, σε αυτή την αναζήτηση συνειδητοποίησε ότι η κατάκτηση της αλήθειας προέρχεται μέσα από την ολική ανατροπή των δεδομένων, δηλαδή ο δρόμος της αμφιβολίας είναι ο μοναδικός δρόμος που οδηγεί στην βεβαιότητα. Οι θεωρίες του Ντεκάρτ έρχονται ως απελευθέρωση του ανθρώπου της εποχής από την καταπίεση των δεδομένων που όριζε το παρελθόν.

Με το ταξίδι του στις Κάτω Χώρες έρχεται σε επαφή με τον Isaac Beeckman, ο οποίος θα τον μυήσει στον κόσμο των μαθηματικών και της Φυσικής. Το όραμα του Ντεκάρτ ήταν η ανακάλυψη των θεμελίων της «Θαυμαστής Επιστήμης», η οποία θα συνέδεε τα μαθηματικά με την φυσική. Οι αναλύσεις του αποτέλεσαν τα θεμέλια της αναλυτικής Γεωμετρίας, καθώς ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια του μεταβλητού μεγέθους και της μεταβλητής συνάρτησης, επιτυγχάνοντας την ένωση της γεωμετρίας και της άλγεβρας.

Η Γεωμετρία του Ντεκάρτ με τη μέθοδο του συστήματος των συντεταγμένων που δημιούργησε και με τον τρόπο κατασκευής των καθέτων και εφαπτομένων στις επίπεδες καμπύλες, βοήθησε σημαντικά το έργο των Νεύτωνα, Λάιμπνιτς, Όιλερ και πολλών ακόμη, ανοίγοντας νέους δρόμους στην επιστήμη των μαθηματικών και της φυσικής. Ο Ρενέ Ντεκάρτ υπήρξε αυτός που ερμήνευσε τον «πραγματικό αριθμό» ως σχέση οποιουδήποτε τμήματος ευθείας απέναντι στο μοναδιαίο μήκος, και ερμήνευσε τους αρνητικούς αριθμούς ως κατευθυνόμενες συντεταγμένες.

Επιπλέον, εισάγει τα σύμβολα  $x$ ,  $y$ ,  $z$  για τα μεταβλητά μεγέθη και τους συντελεστές  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , καθώς και τον τρόπο γραφής των δυνάμεων,  $x^4$ ,  $a^5$ . Επίσης διατύπωσε τον κανόνα των σημείων για τον προσδιορισμό του αριθμού των θετικών και των αρνητικών ριζών, έθεσε το πρόβλημα του αναγνώγιμου, έδειξε ότι η εξίσωση τρίτου βαθμού επιλύεται με τον τετραγωνισμό και λύνεται με τη βοήθεια διαβήτη και κανόνα.

### «Σκέφτομαι άρα υπάρχω»

Παράλληλα, ο Ντεκάρτ αφήνει ανεξίτηλο σημάδι και στη φιλοσοφία. Μέσα από τα σημαντικότερα έργα του «Λόγος περί της μεθόδου», «Στοχασμοί για την πρώτη φιλοσοφία» και «Αρχές φιλοσοφίας» προσεγγίζει τα ζητήματα της μεθόδου της γνώσης, της σχέσης σώματος-ψυχής και ύλης-πνεύματος, αλλά και το θέμα της ύπαρξης θεού, τον οποίο αποδέχεται ως το «τέλειο ον» και υποστηρίζει μέσω ενός «αφαιρετικού συλλογισμού» το αυταπόδεικτο της ύπαρξής του.

Ο ίδιος στο έργο του «Λόγος περί της μεθόδου» διατυπώνει το απόφθεγμα «σκέφτομαι άρα υπάρχω» και αναγνωρίζει την αξία της αμφιβολίας για την αποκάλυψη της μοναδικής αλήθειας:

«Μπορώ να αμφιβάλω για όλα τα πράγματα που με περιβάλλουν και για όλα όσα σκέφτομαι. Οι άνθρωποι συχνά σφάλουν στους συλλογισμούς τους ακόμα και σε απλά θέματα και δεν υπάρχει λόγος να πιστεύω ότι οι αισθήσεις μου δεν με ξεγελούν ή ότι οι σκέψεις μου δεν είναι παρό σαν τα όνειρά μου όταν κοιμάμαι. Μπορώ να αμφιβάλω λοιπόν για όλα όσα σκέφτομαι και πιστεύω, αλλά για ένα πράγμα σε καμία περίπτωση δεν μπορώ να αμφιβάλω, δηλαδή για το ότι αμφιβάλω.

Κατόπιν πρόσεξα πως, ενώ εγώ ήθελα να σκεφτώ έτσι, ότι όλα ήταν ψεύτικα έπρεπε αναγκαστικά, εγώ που το σκεπτόμουν, να είμαι κάτι. Και παρατηρώντας πως τούτη η αλήθεια: σκέπτομαι, άρα υπάρχω ήταν τόσο γερή και τόσο σίγουρη ώστε όλες μαζί οι εξωφρενικές υποθέσεις των σκεπτικών φιλοσόφων δεν ήταν ικανές να την κλονίσουν, έκρινα πως μπορούσα δίχως ενδοιασμούς να την παραδεχθώ σαν την πρώτη αρχή της φιλοσοφίας που αναζητούσα».

Μπορεί οι θεωρίες του Ντεκάρτ να επιρρίθθηκαν εν μέρει από τους μεταγενέστερους του -εμπειριστές- και να αξιοποιηθήκαν με ένα ιδιαίτερο τρόπο, ως κρηπίδωμα του ρεύματος του υλισμού, ωστόσο ήταν αυτές που «λύτρωσαν» τη φιλοσοφία από τις μεσαιωνικές προκαταλήψεις και άνοιξαν το δρόμο για την εποχή του Διαφωτισμού.

*Φίλιππος Σισμανίδης*

## Τι είναι το φαινόμενο της πεταλούδας

Αλήθεια πόσοι από μας γνωρίζουμε τι είναι το φαινόμενο της πεταλούδας; Γιατί ονομάστηκε έτσι και ποια είναι η σχέση του με τα μαθηματικά και το χάος; Ας δούμε απλά και κατανοητά.

**Τι είναι το φαινόμενο της πεταλούδας**, που έχει γίνει μέχρι και ταινία, και γιατί λέγεται έτσι;

Έχει καμιά σχέση με τα πανέμορφα πολύχρωμα έντομα ή πρόκειται για κάτι τελείως διαφορετικό;

Ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή.

Τι είναι το Χάος

Πριν εξηγήσουμε τι είναι **το φαινόμενο της πεταλούδας** (στα αγγλικά butterfly effect) ας πούμε δυο λόγια για την Θεωρία του χάους.

Το "χάος" μπορεί να έχει πολλές και διαφορετικές μεταξύ τους χρήσεις.

Για παράδειγμα, άλλη η έννοια του χάους στην φιλοσοφία, άλλη στην καθομιλουμένη μας γλώσσα (π.χ. κυκλοφοριακό χάος) και άλλη στη σύγχρονη επιστήμη.



Για τους επιστήμονες ο όρος χάος ή χαοτικό σύστημα αναφέρεται σε ένα δυναμικό σύστημα το οποίο παρουσιάζει πολύ μεγάλη ευαισθησία ακόμη και σε μικρές αλλαγές των αρχικών συνθηκών του.

Η μεταβολή αυτή, είναι μεν μια φυσική διαδικασία, ωστόσο είναι απολύτως απρόβλεπτη ή τουλάχιστον δεν μπορεί να υπολογιστεί με τους νόμους της φυσικής του Νεύτωνα που μαθαίνουμε στο σχολείο.

Παραδείγματα χαοτικών συστημάτων από την καθημερινότητα μπορεί να είναι η ακανόνιστη κίνηση ενός ρευστού (π.χ. του νερού της βρύσης) ή του καπνού από το τσιγάρο.

Άλλο παράδειγμα μπορεί να είναι η κίνηση της μπίλιας σε ένα φλιπεράκι. Αν και οι επιμέρους κινήσεις της περιγράφονται από τους νόμους της κλασικής φυσικής, η τελική της θέση είναι αδύνατον να προβλεφθεί.

### Ο πατέρας της θεωρίας του Χάους



Ο πρώτος άνθρωπος που συνέλαβε την ιδέα του χάους ήταν ο Αμερικανός μαθηματικός και μετέπειτα μετεωρολόγος Edward Norton Lorenz την δεκαετία του '60.

Ο Λόρεντζ ξεκίνησε να ασχολείται με την μετεωρολογία κατά τη διάρκεια της στρατιωτικής του θητείας. Αργότερα αυτή έγινε και η κύρια ασχολία του, καθώς του άρεσε πολύ αυτή η δουλειά.

Αυτό που δεν του άρεσε όμως ήταν η αδυναμία μακροπρόθεσμης πρόγνωσης των καιρικών φαινομένων.

Και ενώ αρχικά όλοι οι υπολογισμοί γινόντουσαν στο χέρι, η έλευση των υπολογιστών έμελλε να αλλάξει το σκηνικό ή τουλάχιστον έτσι πίστευαν τότε.

### Το ζήτημα της υπολογιστικής ακρίβειας

Ο Λόρεντζ λοιπόν έκανε τους υπολογισμούς του με τη χρήση ενός ειδικού λογισμικού για την πρόβλεψη του καιρού. Ενώ, όμως, το πρόγραμμα είχε ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων, ο Lorenz κρατούσε μόνο τα 3.

Όταν λοιπόν θέλησε να επαναλάβει ένα πείραμα, παρατήρησε ότι παρά το γεγονός ότι τα δεδομένα εισόδου ήταν τα ίδια, το αποτέλεσμα ήταν τελείως διαφορετικό!

*Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε από την "Νευτώνια" φυσική μικρές αλλαγές στις αρχικές συνθήκες έχουν μικρό αντίκτυπο στο αποτέλεσμα.*

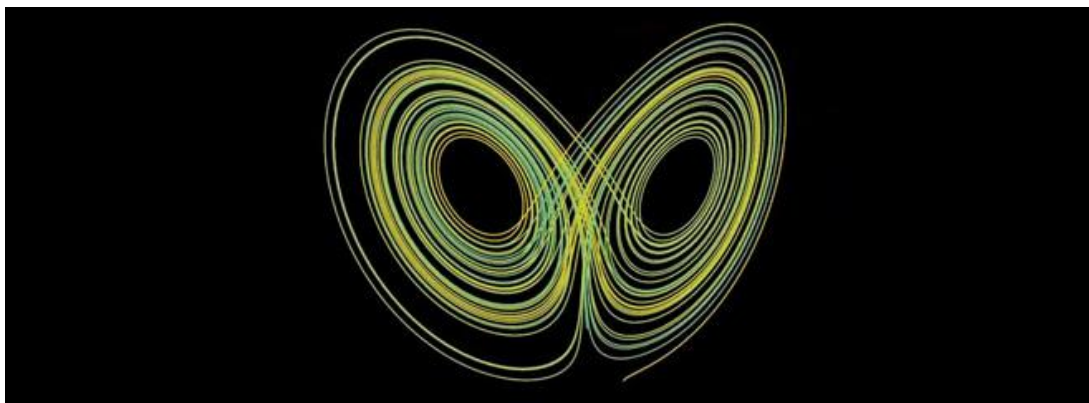
Κάτι τέτοιο όμως φαινόταν πως δεν ίσχυε στην περίπτωση αυτή.

Το συμπέρασμα που έβγαλε ο Lorenz ήταν ότι οι εξισώσεις που εμπλέκονται στην πρόγνωση του καιρού ήταν χαοτικές. Κι αυτό γιατί πολύ μικρά λάθη στις αρχικές συνθήκες (π.χ. πίεση, θερμοκρασία κλπ) πολλαπλασιάζονται καθιστώντας αδύνατη τη μακροχρόνια πρόβλεψη των καιρικών φαινομένων.

Έτσι κατέληξε σε έναν ορισμό για το χάος σύμφωνα με τον οποίο:

*Χάος έχουμε όταν το παρόν καθορίζει το μέλλον, αλλά η προσέγγιση του δεν μπορεί να υπολογίσει προσεγγιστικά το μέλλον.*

Πως όμως προέκυψε το όνομα "φαινόμενο της πεταλούδας";



Γιατί λέγεται φαινόμενο της πεταλούδας;

Το σύστημα του Lorenz είναι ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (γνωστές και ως εξισώσεις Lorenz), το οποίο για δεδομένες τιμές των αρχικών παραμέτρων παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά.

Η επίλυση του θα δώσει ένα σετ χαοτικών λύσεων οι οποίες αν σχεδιαστούν το σχήμα που θα προκύψει, θα μοιάζει με τα φτερά μιας πεταλούδας!

Ο συνδυασμός του σχήματος της πεταλούδας του Λόρεντζ μαζί με την συμπεριφορά των χαοτικών συστημάτων οδήγησε στη δημιουργία του όρου φαινόμενο της πεταλούδας.

Ο όρος χρησιμοποιείται για να περιγράψει ότι μικρές αλλαγές στις αρχικές συνθήκες (το πέταγμα των φτερών μιας πεταλούδας στην Ασία) μπορεί να έχει σημαντικές επιπτώσεις (δημιουργία τυφώνα στη Β. Αμερική).

Στην πραγματικότητα είναι μάλλον αδύνατο να προκληθεί τυφώνας από το πέταγμα μιας πεταλούδας, εκτός και αν κουνήσει τα φτερά της σε μια πολύ συγκεκριμένη χρονική στιγμή, με συγκεκριμένες συνθήκες, κάτι που έτσι κι αλλιώς είναι αδύνατον να προβλεφθεί.



*Επιμελήθηκαν οι μαθήτριες Δήμητρα Γιέτα, Νέσσερη Ελευθερία, Βάσω Κατογιάννη & Καζαντζίδη Μαρία*

## Μια επιστολή από τον Άλμπερτ Αϊνστάιν στην κόρη του: για την καθολική δύναμη της αγάπης



Της μαθήτριας Αδαμαντίας Θεοφάνους

"Στα τέλη της δεκαετίας του 1980, η κόρη του Αϊνστάιν, Lieserl δώρισε 1.400 επιστολές, που γράφτηκαν από τον πατέρα της, στο Εβραϊκό Πανεπιστήμιο, με εντολή να μην δημοσιεύσουν το περιεχόμενό τους, μέχρι δύο δεκαετίες μετά το θάνατό του. Αυτή είναι μία από αυτές.

«Όταν πρότεινα τη θεωρία της σχετικότητας, ελάχιστοι με κατάλαβαν, και αυτό που θα αποκαλύψω τώρα θα συγκρουστεί με την παρανόηση και την προκατάληψη του κόσμου.

Σου ζητώ να φυλάξεις τα γράμματα για όσο διάστημα χρειαστεί, χρόνια, δεκαετίες, έως ότου η κοινωνία είναι αρκετά προηγμένη για να δεχτεί αυτό που θα εξηγήσω παρακάτω.

Υπάρχει μια εξαιρετικά ισχυρή δύναμη που, μέχρι σήμερα, η επιστήμη δεν έχει βρει επίσημη εξήγηση για αυτήν. Είναι μια δύναμη που περιλαμβάνει και διέπει όλους, είναι πίσω από κάθε φαινόμενο που λειτουργεί στο σύμπαν και δεν έχει ακόμη προσδιοριστεί από εμάς. Αυτή η παγκόσμια δύναμη είναι η ΑΓΑΠΗ.

Όταν οι επιστήμονες ερεύνησαν για μια ενοποιημένη θεωρία του σύμπαντος ξέχασαν την πιο ισχυρή αόρατη δύναμη. Η αγάπη είναι φως, που φωτίζει αυτούς που δίνουν και λαμβάνουν. Η αγάπη είναι βαρύτητα, επειδή κάνει τους ανθρώπους να αισθάνονται έλξη για άλλους. Η αγάπη είναι δύναμη, διότι πολλαπλασιάζει το καλύτερο που έχουμε, και επιτρέπει στην ανθρωπότητα να μην σβήσει στον τυφλό εγωισμό της. Η Αγάπη ξεδιπλώνει και αποκαλύπτει. Για την αγάπη ζούμε και πεθαίνουμε. Αγάπη είναι ο Θεός και Θεός είναι η Αγάπη.

Η δύναμη αυτή εξηγεί τα πάντα και δίνει νόημα στη ζωή. Αυτή είναι η μεταβλητή που έχουμε αγνοήσει για πολύ καιρό, ίσως γιατί φοβόμαστε την αγάπη, γιατί είναι η μόνη ενέργεια στο σύμπαν που ο άνθρωπος δεν έχει μάθει να οδηγεί κατά βούληση.

Για να δώσω ορατότητα στην αγάπη, έκανα μια απλή αντικατάσταση στην πιο διάσημη εξίσωση μου. Αν αντί για  $E = mc^2$ , δεχθούμε ότι η ενέργεια για να θεραπεύσει τον κόσμο μπορεί να επιτευχθεί μέσα από την αγάπη όταν πολλαπλασιάζεται με την ταχύτητα του φωτός στο τετράγωνο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αγάπη είναι η πιο ισχυρή δύναμη που υπάρχει, διότι δεν έχει όρια.

Μετά την αποτυχία της ανθρωπότητας στη χρήση και τον έλεγχο των άλλων δυνάμεων του σύμπαντος, που έχουν στραφεί εναντίον μας, είναι επιτακτική ανάγκη να τραφούμε με ένα άλλο είδος ενέργειας ...

Αν θέλουμε το είδος μας να επιβιώσει, αν θέλουμε να βρούμε το νόημα της ζωής, αν θέλουμε να σώσουμε τον κόσμο και κάθε ον με αισθήσεις που κατοικεί σε αυτόν, η αγάπη είναι η μία και μοναδική απάντηση.

Ίσως δεν είμαστε ακόμη έτοιμοι να κάνουμε μια βόμβα αγάπης, μια συσκευή αρκετά ισχυρή ώστε να καταστρέψει εντελώς το μίσος, τον εγωισμό και την απληστία που καταστρέφουν τον πλανήτη.

Ωστόσο, κάθε άτομο φέρει μέσα του μια μικρή αλλά ισχυρή γεννήτρια αγάπης της οποίας η ενέργεια περιμένει να απελευθερωθεί.

Όταν μάθουμε να δίνουμε και να λαμβάνουμε αυτή την παγκόσμια ενέργεια, αγαπητή Lieserl, θα έχουμε επιβεβαιώσει ότι η αγάπη κατακτά τα πάντα, είναι σε θέση να ξεπεράσει τα πάντα, γιατί η αγάπη είναι η πεμπτουσία της ζωής.

Με λυπεί βαθύτατα που δεν μπόρεσα να εκφράσω ό, τι έχω στην καρδιά μου, που χτυπά για σένα μια ζωή. Ίσως είναι πολύ αργά για να ζητήσω συγγνώμη, αλλά καθώς ο χρόνος είναι σχετικός, πρέπει να σου πω ότι σ αγαπώ και πως χάρη σε εσένα έφτασα στην τελική απάντηση! "

Ο πατέρας σου,  
Άλμπερτ Αϊνστάιν"

## Ο κύκλος των εννέα σημείων (κύκλος του Euler)

Ο κύκλος των εννέα σημείων είναι ο κύκλος που διέρχεται από τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, τα ίχνη των υψών του τριγώνου καθώς και από τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν τις κορυφές του τριγώνου με το ορθόκεντρο του.

### Σχήμα 1

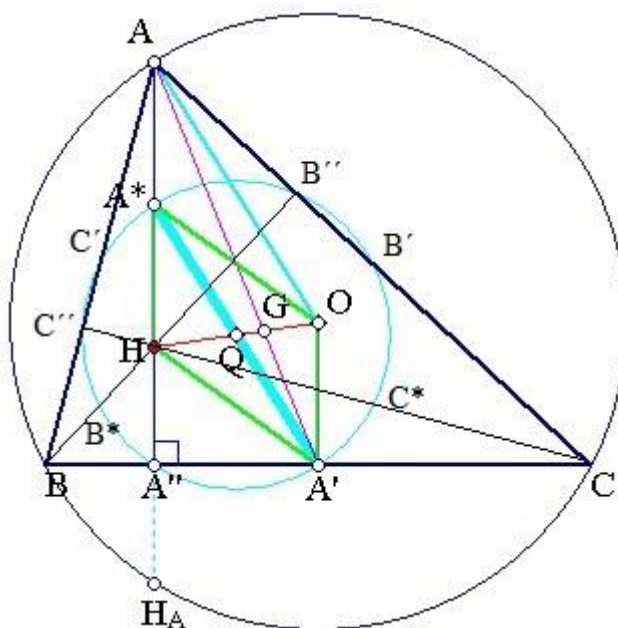
Ο γαλάζιος κύκλος, διέρχεται από τα μέσα  $A', B', C'$  των πλευρών τριγώνου  $ABC$ , από τα ίχνη (πόδες) των υψών του  $A'', B'', C''$  και τα μέσα  $A^*, B^*, C^*$  των τμημάτων  $HA, HB, HC$  (αποστάσεις των υψών από το ορθόκεντρο ως την αντίστοιχη κορυφή).

### Απόδειξη

Το  $A^*HA''O$  είναι παραλληλόγραμμο. Το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι το μέσον  $Q$  της  $OH$  και η διαγώνιος  $A'A^*$  είναι παράλληλη και ίση προς την ακτίνα  $OA$  του περιγεγραμμένου κύκλου. Συνεπώς τα σημεία  $A^*, A'', A'$  είναι στον κύκλο με κέντρο  $Q$  και διάμετρο ίση με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Το ίδιο θα ισχύει και για τις ανάλογες τριάδες σημείων  $B^*, B'', B'$  και  $C^*, C'', C'$ .

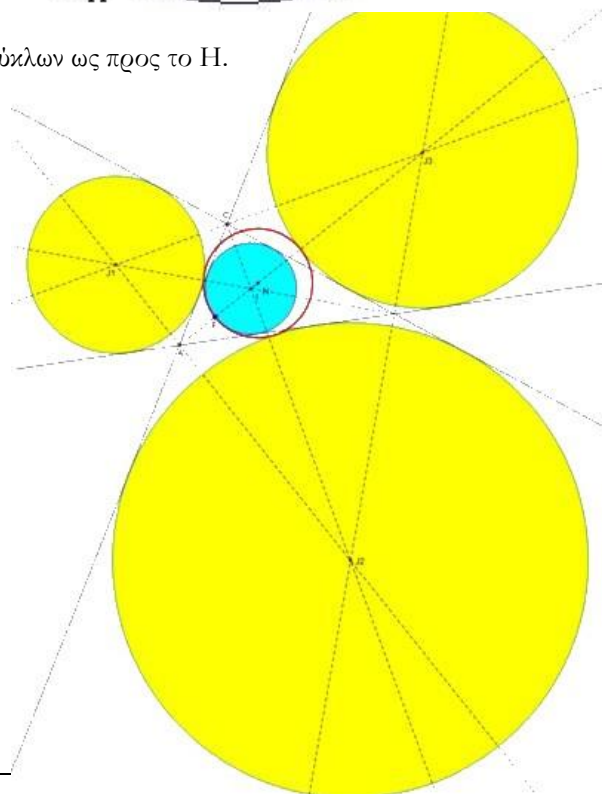
### Συμπεράσματα

- Για να βρούμε το κέντρο του κύκλου σχεδιάζουμε το τρίγωνο των τριών μέσων των πλευρών  $A', B', C'$  και βρίσκουμε το κέντρο  $Q$  του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου αυτού. Το  $Q$  είναι το κέντρο του κύκλου του Euler.
- Το κέντρο του κύκλου του Euler είναι στο μέσο της ευθείας Euler  $HO$  και η ακτίνα του είναι το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου του.
- Ο κύκλος του Euler είναι ομοιόθετος του περιγεγραμμένου κύκλου, με κέντρο ομοιοθεσίας το ορθόκεντρο  $H$  και λόγο ομοιοθεσίας  $1/2$ . Αυτό προκύπτει από την παραλληλία των ακτινών των δύο κύκλων:  $QA^*=OA/2$ .
- Οι ευθείες  $OA$  και  $HA''$  τέμνονται επί του περιγεγραμμένου κύκλου λόγω της ομοιοθεσίας των δύο κύκλων ως προς το  $H$ .
- Το ύψος  $AA''$  τέμνει ξανά τον περιγεγραμμένο κύκλο σε σημείο  $H_A$  και το μέσον της  $HH_A$  είναι το  $A''$ . Και αυτό είναι συνέπεια της ομοιοθεσίας των δύο κύκλων.



- Μια ιδιότητα του κύκλου του Euler, είναι ότι εφάπτεται των τριών τρισεφαπτομένων κύκλων του τριγώνου, εγγεγραμμένου και τριών παρεγγεγραμμένων.

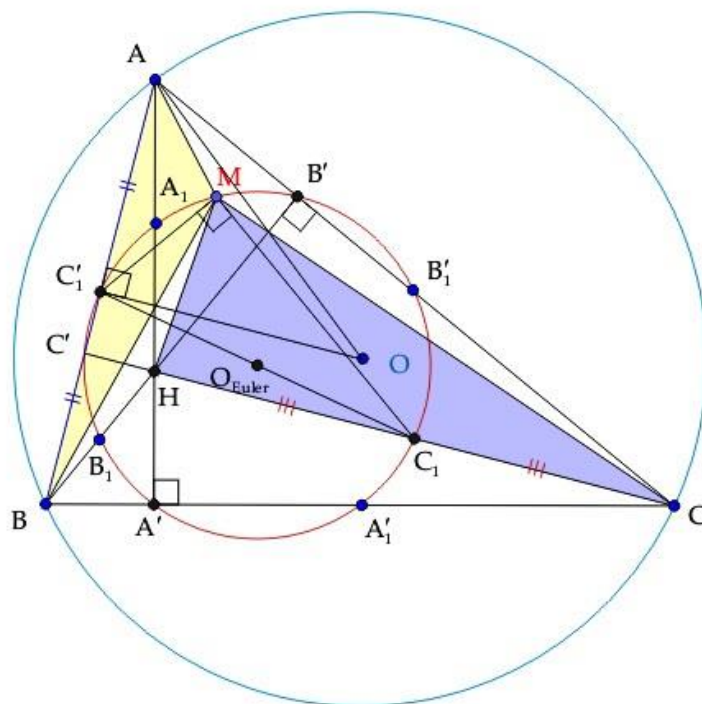
(Θεώρημα Feuerbach. Βλέπε σχήμα)



- Ο κύκλος του Euler είναι ειδική περίπτωση της κωνικής εννέα σημείων που διέρχεται από τα έξι μέσα πλευρών ενός πλήρους τετραπλεύρου.  
 Η ειδική περίπτωση λαμβάνεται όταν οι κορυφές του τετραπλεύρου αποτελούν μια ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε τρία από τα τέσσερα σημεία σχηματίζουν τρίγωνο που έχει το τέταρτο σημείο ως ορθόκεντρο.

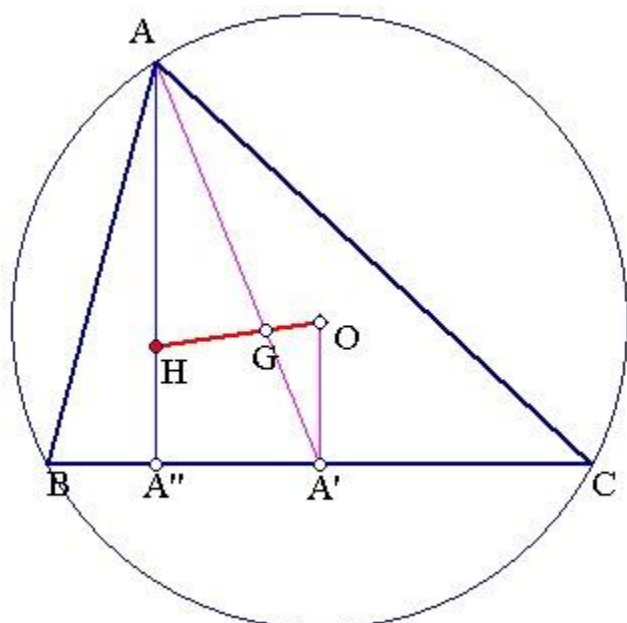
**Σχήμα 2**

- Ο κύκλος του Euler (των εννέα σημείων) τριγώνου ABC είναι ο κύκλος που διέρχεται από τα μέσα των πλευρών, τα ίχνη των υψών και τα μέσα των αποστάσεων του ορθόκεντρου από τις κορυφές (δηλαδή στο σχήμα που ακολουθεί τα σημεία A', B', C', A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>, A<sub>1</sub>', B<sub>1</sub>', C<sub>1</sub>').
- Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το μέσο μιας πλευράς του τριγώνου με το μέσο της απόστασης του ορθόκεντρου από την κορυφή που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά αυτή είναι διάμετρος του κύκλου Euler δηλαδή στο σχήμα που ακολουθεί μία διάμετρος είναι η C<sub>1</sub>C<sub>1</sub>'.
- Η ακτίνα του κύκλου του Euler είναι ίση με τη μισή ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
- Η απόσταση του ορθόκεντρου από μια κορυφή τριγώνου είναι ίση με το διπλάσιο της απόστασης του κέντρου του περικύκλιου του τριγώνου από την απέναντι της κορυφής αυτής πλευρά, δηλαδή HC=2OC<sub>1</sub>'.
- Αν H το ορθόκεντρό του και M τυχαίο σημείο του κύκλου Euler του τριγώνου τότε ισχύει MA<sup>2</sup>+MB<sup>2</sup>+MC<sup>2</sup>+MH<sup>2</sup> σταθερό.



**Ευθεία του Euler**

Το περίκεντρο O, το κέντρο βάρους G και το ορθόκεντρο H κάθε τριγώνου, περιέχονται σε ευθεία και ισχύει HG = 2GO.



**Απόδειξη**

Ενώνουμε το περίκεντρο O με το κέντρο βάρους G (σημείο τομής διαμέσων) και ορίζουμε το H προεκτείνοντας κατά το διπλάσιο GH=2OG. Αν AA' διάμεσος, τα τρίγωνα που σχηματίζονται GHA και GOA' είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 2, αφού το κέντρο βάρους χωρίζει κάθε διάμεσο σε λόγο 2:1. Άρα η AH ως παράλληλη της OA' είναι κάθετος στην BC. Συνεπώς, το H είναι επί του ύψους προς την BC. Όμοια και με τις άλλες διαμέσους, προκύπτει ότι το H είναι επί όλων των υψών, άρα συμπίπτει με το ορθόκεντρο.

**Συμπέρασμα**

Το AH είναι διπλάσιο του OA' και το HG διπλάσιο του GO.

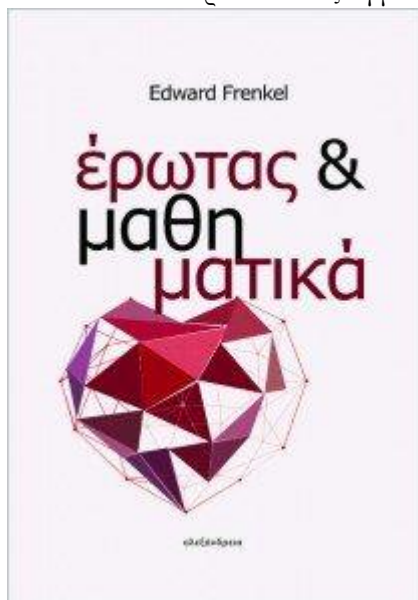
*Του μαθητή Απόστολου Βερυκίου*

## Μαθηματικά και λογοτεχνία

Ο κόσμος των μαθηματικών φαντάζει ως ένα σύμπαν ερμητικά κλειστό για τους μη μυημένους. Η μόδα όμως της «μαθηματικής λογοτεχνίας», συνέβαλε ώστε να ανατραπεί αυτό το στερεότυπο: όσοι δεν έχουν καλή σχέση με τους αριθμούς, μικροί και μεγάλοι, μπορούν να απολαύσουν ένα μαθηματικό μυθιστόρημα ή ένα βιβλίο που συμβάλλει στην κατανόηση του μαγικού κόσμου των μαθηματικών.

Σε αυτή τη στήλη θέλοντας να αναδείξουμε την επίδραση των μαθηματικών στη λογοτεχνία παρουσιάζουμε κάθε φορά βιβλία που αναδεικνύουν αυτήν την σχέση μαθηματικών και λογοτεχνίας. Επιμελείται η μαθήτρια **Σκαμνέλου Χριστίνα**.

«Σκεφτείτε να υποχρεωνόσασταν στο σχολείο να παρακολουθήσετε ένα μάθημα καλλιτεχνικών στο οποίο θα σας διδασκάνε μόνο πώς να βάζετε ένα φράχτη. Σκεφτείτε να μη σας έδειχναν ποτέ τους πίνακες του **Λεονάρντο Ντα Βίντσι** ή του **Πικάσο**. Θα σας βοηθούσε αυτό το μάθημα να εκτιμήσετε την τέχνη; Θα σας έκανε να θελήσετε να μάθετε περισσότερα;», αναρωτιέται ο κορυφαίος μαθηματικός και συγγραφέας **Edward Frenkel** στον πρόλογο του βιβλίου του, **ΈΡΩΤΑΣ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**, (Εκδ. Αλεξάνδρεια – Μετάφραση: **Τεύχος Μιχαηλίδης**). Και διαπιστώνει: «Έτσι διδάσκονται τα μαθηματικά στο σχολείο, οπότε στα μάτια των περισσότερων από εμάς ισοδυναμούν με το να κάθεται και να παρακολουθείς τη μογοιά να στεγνώνει».



Δεν πρόκειται, όμως, για ένα βιβλίο που επιχειρεί, απλώς, να αποκαλύψει την κρυμμένη ομορφιά και το εύρος των μαθηματικών και να στηλιτεύσει τον συμβατικό τρόπο διδασκαλίας τους. Αλλά για ένα σύνθετο, συναρπαστικό ανάγνωσμα στο οποίο το πάθος του Frenkel για τα μαθηματικά – καθηγητής σήμερα στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας στο Μπέρκλεϊ – συνυπάρχει με μια από τις πιο σκοτεινές όψεις της ευρωπαϊκής Ιστορίας, στη Σοβιετική Ένωση της δεκαετίας του '80 όπου μεγάλωσε, καθώς και με το πρόσφατο, φωτεινό εγχείρημά του. Αυτό τον καιρό εργάζεται σε ένα από τα σπουδαιότερα επιτεύγματα των τελευταίων πενήντα χρόνων: το **Πρόγραμμα Λάνγκλανς**, μια μεγάλη **Ενοποιημένη Θεωρία των Μαθηματικών** η οποία επιτρέπει στους ερευνητές να μεταφράζουν ευρήματα από το ένα πεδίο στο άλλο για να επιλύσουν προβλήματα έως τώρα απροσπέλαστα, όπως το τελευταίο **ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΦΕΡΜΑ**.

Το αυτοβιογραφικό στοιχείο, η προσωπική προσπάθεια του συγγραφέα να κατακτήσει τη γνώση και να εισχωρήσει στον μαγευτικό κόσμο των μαθηματικών, ενισχύει την αφηγηματική δύναμη του βιβλίου το οποίο αποκαλύπτει αριστοτεχνικά τις *κρυμμένες συγχροδίες των σύγχρονων μαθηματικών* στη ζωή μας. Συνεκτικό στοιχείο όλων είναι ο έρωτας. Σύμφωνα με τον Frenkel, κάθε μαθηματικός τύπος που ανακαλύπτεται είναι ένας τύπος του έρωτα. «Γα μαθηματικά», σημειώνει, «αποτελούν πηγή αιώνιας και βαθιάς γνώσης, που στοχεύει κατευθείαν στην καρδιά των πραγμάτων και μας ενώνει διασχίζοντας πολιτισμούς, ηπείρους και αιώνες».

Η αφήγηση ακολουθεί βήμα – βήμα τη διαδρομή του από τα χρόνια που αισθανόταν απέχθεια για τα μαθηματικά, μέχρι το ζύπνημα του ενδιαφέροντός του για αυτά με την προτροπή ενός φωτισμένου Ρώσου μαθηματικού, του **Εβγκένι Εβγκενιέβιτς**. Εκείνος του μίλησε, πρώτη φορά, για την ουσία της συμμετρίας και του άνοιξε το δρόμο προς τις έννοιες και τις ιδέες των σύγχρονων μαθηματικών. Σε κάθε κεφάλαιο, τα βιογραφικά στοιχεία συμπλέκονται αρμονικά με πληροφορίες και παρατηρήσεις για κορυφαίες προσωπικότητες και σημαντικά ζητήματα από ολόκληρο το φάσμα της μαθηματικής επιστήμης: το τελευταίο **ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΦΕΡΜΑ**, τις ιδέες για τις συμμετρίες των αριθμών του Γάλλου μαθηματικού **Εβαριστ Γκαλουά**, τη **ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΡΙΜΑΝ** για την καμπυλότητα του χώρου, τον **ΚΒΑΝΤΙΚΟ ΔΥΪΣΜΟ**, καθώς και με αναφορές στην τέταρτη διάσταση, εμπλουτισμένες με παραδείγματα από την τέχνη, όπως εκείνη στον διάσημο πίνακα του **Μαρσέλ Ντισάν**, *Γυμνό που κατεβαίνει τη σκάλα κ.α.*



Η αισιοδοξία διατρέχει ολόκληρο το βιβλίο, ενώ ο πλούτος των μαθηματικών αναφορών, οι επιστημονικές ανακαλύψεις, η λάμψη της γνώσης και των επιτευγμάτων του ανθρώπου δεν θα διακρίνονταν, τόσο ανάγλυφα ίσως, αν οι αναγνώστες δεν έρχονταν αντιμέτωποι, από τις πρώτες σελίδες του βιβλίου, με μια βαριά σιιά: ο Edward Frenkel, παιδί θαύμα με ιδιαίτερες ικανότητες, δέχτηκε σε τρυφερή ηλικία όλο το μίσος και την παράνοια ενός καταπιεστικού καθεστώτος. Οι αρχές της χώρας τού αρνήθηκαν την εγγραφή στο Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας, ενώ ήταν άριστος, λόγω της πολιτικής των φυλετικών διακρίσεων στη Σοβιετική Ένωση, επειδή ο πατέρας του είχε γερμανοεβραϊκή καταγωγή. Η λεπτομερής περιγραφή του μαρτυρίου που πέρασε στις εισαγωγικές εξετάσεις, ενώ απαντούσε σωστά σε όλες τις ερωτήσεις, είναι ανάλογη ενός εφιάλτη οργουελικής έμπνευσης. Ο ίδιος δεν λύγισε, όμως. Ίδου η στάση του:

«Μου βρόντηξαν τις πόρτες κατά πρόσωπο. Ήμουν ένας παρίας. Αλλά εγώ δεν τα παράτησα. Τρύπωνα λαθραία στο πανεπιστήμιο για να παρακολουθήσω διαλέξεις και σεμινάρια. Μελετούσα μόνος μου βιβλία μαθηματικών, μερικές φορές μέχρι αργά το βράδυ. Και στο τέλος, κατάφερα να νικήσω το σύστημα. Δεν μου επέτρεπαν να μπω από την μπροστινή πόρτα; Μπήκα από το παράθυρο. Όταν είσαι ερωτευμένος, ποιος μπορεί να σε σταματήσει;».

## Μαθηματικά Θετικού προσανατολισμού

Για τους μαθητές της Γ Λυκείου, επιμέλεια **Σαρδελή Κατερίνα**

Λύσεις των ασκήσεων του 4<sup>ου</sup> τεύχους :

1. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, \beta]$ , και για κάθε  $x$  που ανήκει στο διάστημα  $[a, \beta]$  με  $f(x) \neq 0$  υπάρχει  $y \in [a, \beta]$  με  $|f(y)| < |f(x)|$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in [a, \beta]$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = 0$ .
  - Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ρίζα στο διάστημα  $[a, \beta]$ . Τότε η  $f$  θα διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα  $[a, \beta]$ . Έστω ότι για κάθε  $x \in [a, \beta]$  είναι  $f(x) > 0$  και έστω ότι  $f_{\min} = f(\xi) > 0$ . Από την υπόθεση θα υπάρχει  $y$  με  $f(y) < f(\xi)$ , άτοπο. Έστω ότι για κάθε  $x \in [a, \beta]$  είναι  $f(x) < 0$  και έστω ότι  $f_{\max} = f(\xi) < 0$ . Από την υπόθεση θα υπάρχει  $y$  με  $-f(y) < -f(\xi)$ , άρα  $f(y) > f(\xi)$ , άτοπο.
2. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x + e^x - 1$ .
  - i. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
  - ii. Να λύσετε την εξίσωση  $e^x = 1 - x$ .
  - iii. Να λύσετε την ανίσωση  $f^{-1}(f(x) - x + 1) > 1$ .
  - iv. Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως μονότονη συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιεί τη σχέση  $g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1$ . Να αποδείξετε ότι:
    - a) η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα
    - β) η  $Cg$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
  - v. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $(g \circ g)(x) - g(1 - x^{2012}) = 0$ , έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα  $(0, 1)$ .
    - Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης  $f$  είναι  $f'(x) = 1 + e^x > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα  $x \in \mathbb{R}$  και επομένως '1-1', άρα αντιστρέφεται.
    - Η εξίσωση γίνεται  $x + e^x - 1 = 0$  άρα  $f(x) = 0$  που έχει προφανή ρίζα τη  $x = 0$  που είναι και μοναδική λόγω της μονοτονίας της  $f$ .
    - Θα είναι  $f^{-1}(f(x) - x + 1) > 1$  ή  $f(f^{-1}(f(x) - x + 1)) > f(1)$  ( $f$  γνησίως αύξουσα)  
ή  $f(x) - x + 1 > e$  ή  $x + e^x - 1 - x + 1 > 1$  ή  $e^x > 1$  άρα  $x > 0$ .

- Ισχύει  $g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1$  άρα  $g(x) + e^{g(x)} - 1 = 2x$  ή  $f(g(x)) = 2x$  (1)

Έστω ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα άρα για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  θα είναι  $g(x_1) > g(x_2)$  άρα και  $e^{g(x_1)} > e^{g(x_2)}$ . Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε  $g(x_1) + e^{g(x_1)} > g(x_2) + e^{g(x_2)}$   
 $g(x_1) + e^{g(x_1)} - 1 > g(x_2) + e^{g(x_2)} - 1$  ή  $f(x_1) > f(x_2)$  άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα. Άτοπο.  
 Άρα  $g$  γνησίως αύξουσα.

Από τη σχέση (1)  $f(g(x)) = 2x$  για  $x = 0$   $f(g(0)) = 0 = f(0)$  και επειδή  $f$  είναι 1-1  $g(0) = 0$ , επομένως η  $g$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- Έστω η συνάρτηση  $h(x) = (g \circ g)(x) - g(1 - x^{2012})$

Η  $h$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, 1]$  (Πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων) με  $h(0) = g(g(0)) - g(1) = g(0) - g(1) = -g(1) < 0$  και

$$h(1) = g(g(1)) - g(0) = g(g(1)) > 0 \text{ γιατί } 1 > 0 \text{ άρα } g(1) > g(0) = 0 \text{ και } g(g(1)) > g(0) = 0$$

άρα  $h(0)h(1) < 0$  και από θεώρημα **Bolzano** η  $h(x) = 0$ , έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα  $(0, 1)$  άρα και το ζητούμενο.

**Προτεινόμενες ασκήσεις :**

1. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη με  $f^3(x) + f(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- α. Να βρεθεί η τιμή  $f(0)$ .
- β. Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.
- γ. Να δείξετε ότι  $xf'(x) < f(x) < x$  για κάθε  $x > 0$ .

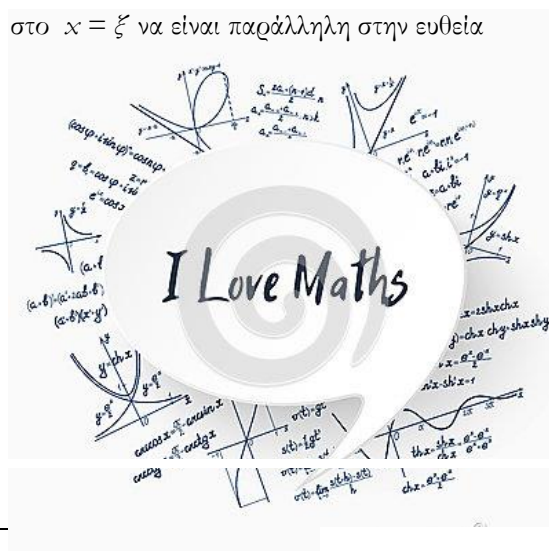
2. Έστω  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f(x) = g(x) + a$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a < 0$ .

Αν η  $g$  είναι περιττή και υπάρχει  $p > 0$  με  $g'(p) = 0$ ,  $g(p) < a$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

- A. Να δείξετε ότι  $f'(p) = 0 = f'(-p)$
- B. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες στο  $\mathbb{R}$ .
- Γ. Να δείξετε ότι  $f''(0) = 0$
- Δ. Αν  $A(p, f(p))$ ,  $B(-p, f(-p))$ ,  $\Gamma(0, f(0))$  να δείξετε ότι :
  - Δ<sub>1</sub>. Τα σημεία  $A, B$  είναι συμμετρικά ως προς το  $\Gamma$ .
  - Δ<sub>2</sub>. Υπάρχει  $\xi \in (0, p)$  ώστε η εφαπτομένη της  $C_g$  στο  $x = \xi$  να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα  $A, B, \Gamma$ .

E. Να δείξετε ότι  $\int_p^0 \frac{f'(x) - f(x)}{e^{x-p}} dx < 2a$ .

Οι λύσεις στο επόμενο φύλλο της εφημερίδας.



## Παιχνίδι με τους αριθμούς!!

1. Δείτε αυτό το παιχνίδι με τους αριθμούς, είναι αρκετά εντυπωσιακό!

$$\begin{aligned}
 1 \times 8 + 1 &= 9 \\
 12 \times 8 + 2 &= 98 \\
 123 \times 8 + 3 &= 987 \\
 1234 \times 8 + 4 &= 9876 \\
 12345 \times 8 + 5 &= 98765 \\
 123456 \times 8 + 6 &= 987654 \\
 1234567 \times 8 + 7 &= 9876543 \\
 12345678 \times 8 + 8 &= 98765432
 \end{aligned}$$

και τελικά:  $123456789 \times 8 + 9 = 987654321$

Παρατηρήστε λιγάκι τα νούμερα!! Απίστευτο!



2. Ο πολλαπλασιασμός των  $111.111.111$  επί  $111.111.111$  μας κάνει...

$$\dots = 12.345.678.987.654.321 \quad !!$$

Για δείτε λίγο πιο προσεκτικά τα νούμερα του αποτελέσματος...

3. Τι έκανε ένας τρελαμένος κινέζος με το γνωστό  $\pi$  (3,14) ;

Ξέρετε ότι το  $\pi$  είναι ένα νούμερο που δεν τελειώνει ποτέ. Αλλά εμείς για λόγους απλοποίησης, το αναφέρουμε ως 3,14 (μόνο με τα δύο πρώτα δεκαδικά).

Ένας Κινέζος φοιτητής που λέτε, ο Lu Chao, έκανε το εξής και μάλιστα στο ρεκόρ Guinness: απομνημόνευσε τα πρώτα 67.890 ψηφία του αριθμού αυτού και τα είπε χωρίς να κάνει ούτε ένα λάθος!!

$3.141592653589793238462643\dots$

Του πήρε 24 ώρες και 4 λεπτά ώστε να πει όλα αυτά τα ψηφία και η πλάκα είναι ότι είχε απομνημονεύσει 91.300 νούμερα αλλά ένα λάθος στο 67.891ο αριθμό (αντί για να πει 0 είπε 5), τον σταμάτησε εκεί!

4. Πόσες είναι οι πρώτες 4 πιθανές κινήσεις στο σάκι;

Όλοι πάνω κάτω γνωρίζουμε έστω και τα πολύ βασικά στο σάκι.

Πόσοι είναι λοιπόν, στο σύνολό τους, οι συνδυασμοί των πρώτων 4 κινήσεων (του ενός παίκτη!), από τη στιγμή που θα ξεκινήσει το παιχνίδι;

Πόσοι λέτε;

Κάποιες χιλιάδες; Καμία σχέση!

Είναι 300+ δισεκατομμύρια συνδυασμένων πιθανών κινήσεων που μπορεί να κάνει ένας παίκτης, κατά τις πρώτες 4 κινήσεις του!!

Για την ακρίβεια είναι: 318.979.564.000 πιθανοί συνδυασμοί!!



Από τη μαθήτριά Ελένη Παβέλη

# Μαθηματικοί Γρίφοι *Από τους μαθητές Ιωάννη Σιάροκο, Βερόνικο Απόστολο &*

*Γιώργο Μπούρα*

Σε αυτή τη στήλη της εφημερίδας παρουσιάζονται μαθηματικοί γρίφοι και σταυρόλεξα, *Sudoku* (και οι λύσεις του προηγούμενου φύλλου)

Λύση 4<sup>ου</sup> τεύχους

9	8	7	6	2	1	4	5	3
6	5	2	4	3	8	9	7	1
3	4	1	9	5	7	8	2	6
8	2	4	3	1	6	7	9	5
7	9	3	5	8	4	1	6	2
1	6	5	2	7	9	3	4	8
2	1	8	7	9	5	6	3	4
5	7	6	8	4	3	2	1	9
4	3	9	1	6	2	5	8	7

No 4

					8	7		
		8			5		6	9
7	5		4	3			8	
4	2		9				1	3
		3		2		5		
8	1				7		2	6
	3			8	2		9	7
1	7		6			4		
		9	1					

No 5

## 1. "Ο τοξότης"

Ένας τοξότης έχει ένα τόξο και εξήντα βέλη.

Αν ρίξει το πρώτο του βέλος στις 12:00 το μεσημέρι και συνεχίσει να ρίχνει ένα βέλος κάθε λεπτό, τι ώρα θα του τελειώσουν τα βέλη;

## 2. "Οι λίρες"

Έχουμε 10 πιθάρια με λίρες. Τα 9 περιέχουν κανονικές λίρες και το 1 κάλπικες.

Η κανονική λίρα ζυγίζει 10 gr ενώ η κάλπικη 9 gr.

Πώς μπορούμε να εντοπίσουμε το πιθάρι που περιέχει τις κάλπικες λίρες, με ένα μόνο ζύγι;

Σημειώνεται ότι διαθέτουμε ζυγαριά ακριβείας και ότι μπορούμε να πάρουμε από τα πιθάρια όσες λίρες θέλουμε για το ζύγι.

## 3. "Αγώνας τένις"

Δύο άντρες παίζουν τένις. Έπαιξαν πέντε σετ και ο καθένας κέρδισε τρία σετ. Πως έγινε αυτό;

## 4. "Ένα μπουκέτο με λουλούδια"

Έχω ένα μπουκέτο με λουλούδια. Όλα τα λουλούδια είναι τριαντάφυλλα εκτός από δύο, όλα είναι γαρύφαλα εκτός από δύο και όλα είναι μαργαρίτες εκτός από δύο.

Πόσα λουλούδια απ' το κάθε είδος έχει το μπουκέτο;

## 5. "Γάτες και σκύλοι"

Πέντε σκύλοι πιάνουν πέντε γάτες σε πέντε λεπτά. Πόσοι σκύλοι πιάνουν 100 γάτες σε 100 λεπτά

100 γάτες σε 100 λεπτά...

πέντε γάτες ή ένας σκύλος πιάνει 20 γάτες σε 100 λεπτά. Άρα πέντε σκύλοι πιάνουν 100 γάτες σε 100 λεπτά. Από την πρόταση πέντε γάτες ή ένας σκύλος πιάνει μία γάτα σε 100 λεπτά.

**Απάντηση 4:** Ένα τριαντάφυλλο, ένα γαρύφαλο, και μία μαργαρίτα.

**Απάντηση 3:** Έκκολο αφοδ δεν επαιζαν μαζί.

και κ.ο.κ.

Αν το βέλος που θα δείξει η ζυγαριά είναι 549 gr σημαίνει πως έχουμε πάρει 1

55 x 10 = 550 gr.

Συνολικά θα έχουμε 55 λίρες. Αν ήταν κανονικές θα επάρε το βάρος να ήταν

**Απάντηση 2:** Από το 1<sup>ο</sup> πιθάρι θα πάρουμε 1 λίρα από το 2<sup>ο</sup> 2 λίρες κ.ο.κ.

**Απάντηση 1:** Πόσους στις 12:59.